

PREMIERS ÉLÉMENTS

DU

CALCUL INFINITÉSIMAL

PARIS. — IMP. SIMON RAÇON ET COMP., RUE D'ERFURTH, 1.

PREMIERS ÉLÉMENTS

DU

CALCUL INFINITÉSIMAL

A L'USAGE DES JEUNES GENS

QUI SE DESTINENT

A LA CARRIÈRE D'INGÉNIEUR

PAR

H. SONNET

OFFICIER DE LA LÉGION D'HONNEUR, INSPECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS
PROFESSEUR D'ANALYSE ET DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS
ET MANUFACTURES



PARIS
LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET Cie
BOULEVARD SAINT-GERMAIN, N° 77

1869

PRÉFACE

L'analyse infinitésimale est une science fort étendue, et les auteurs qui ont traité cette matière y ont toujours consacré deux, et quelquefois trois gros volumes. Mais une très-grande partie de cette science n'a qu'un intérêt purement théorique et reste sans application dans les questions usuelles que les ingénieurs ont à résoudre. Les règles de la différentiation, le calcul des quadratures, l'intégration des équations différentielles les plus simples, et quelques applications géométriques consacrées par l'usage, sont tout ce qu'il est nécessaire de connaître pour aborder l'étude de la Mécanique industrielle ou celle de la Stabilité des constructions. — Il nous a donc semblé qu'un ouvrage où seraient développés les principes les plus élémentaires du Calcul différentiel et du Calcul intégral pouvait être utile aux jeunes gens qui se

proposent d'embrasser la carrière d'ingénieur, en les dispensant de chercher dans de gros livres la solution des questions qui les intéressent plus particulièrement. C'est cet ouvrage que nous avons essayé de rédiger, en profitant de l'expérience que nous avons pu acquérir dans un enseignement tout spécial, sur les besoins de la jeunesse en ce qui touche le sujet dont il s'agit.

Ce livre ne saurait avoir aucune prétention scientifique, et il a fallu faire abnégation d'amour-propre pour nous réduire au rôle très-secondaire que nous avons accepté. Mais si nous avons réussi à être utile aux lecteurs pour lesquels cet opuscule est écrit, nous nous regarderons comme suffisamment payé de notre peine.

Les rigoristes nous reprocheront sans doute d'avoir omis certaines discussions ou laissé dans l'ombre certains points délicats. Nous les prions de nous faire grâce et de vouloir bien considérer que, dans un enseignement aussi élémentaire, destiné surtout à préparer promptement les lecteurs aux applications utiles, nous avons dû faire le sacrifice de tout ce qui aurait retardé notre marche.

Les principes élémentaires du Calcul infinitésimal sont aujourd'hui si répandus, que nous pourrions nous dispenser d'indiquer les sources auxquelles nous avons puisé. Cependant nous croyons remplir un devoir en déclarant que le *Traité élémentaire de Calcul différentiel*

et de Calcul intégral de Lacroix, le *Traité élémentaire de la Théorie des fonctions et du Calcul infinitésimal* de M. Cournot, le *Cours d'Analyse de l'École polytechnique* par M. Duhamel, enfin le *Cours de Calcul différentiel et intégral* de M. A. Serret, sont les ouvrages que nous avons le plus fréquemment consultés.



PREMIERS ÉLÉMENTS

DU

CALCUL INFINITÉSIMAL

PREMIÈRE PARTIE

PREMIERS ÉLÉMENTS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

I. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1. — Le calcul différentiel est la partie des mathématiques qui traite des variations infiniment petites des fonctions.

2. — On sait qu'une variable y est dite *fonction* d'une autre variable x, si y varie avec x, et si y prend une ou plusieurs valeurs déterminées quand on attribue une valeur déterminée à x. Ainsi, en coordonnées rectilignes, l'ordonnée d'une courbe est une fonction de l'abscisse.

Si la relation qui lie x et y est exprimée par une équation résolue par rapport à y, comme $y=f(x)$, on dit que y est une fonction *explicite* de x. Si cette relation est exprimée par une équation non résolue, comme $f(x, y)=0$, on dit que y est une fonction *implicite* de x. Dans l'un et l'autre cas, x prend le nom de *variable indépendante* ; c'est celle à laquelle on

attribue des valeurs particulières pour en déduire les valeurs correspondantes de la fonction y.

3. — De même, une variable z est dite fonction de deux autres variables x et y, si elle varie en même temps que x et y, et si elle prend une ou plusieurs valeurs déterminées quand on attribue des valeurs déterminées à x et y. Ainsi, en coordonnées rectilignes, l'ordonnée z d'une surface courbe est une fonction des deux autres coordonnées x et y.

C'est une fonction *explicite* si la relation qui lie les trois variables est exprimée par une équation résolue par rapport à z comme $z=f(x,y)$; c'est une fonction *implicite* si cette relation est exprimée par une équation non résolue, comme $f(x,y,z)=0$. Dans l'un et l'autre cas, x et à y sont les *variables indépendantes ;* ce sont celles auxquelles on attribue des couples de valeurs particulières, pour en déduire les valeurs correspondantes de la fonction z.

4. — On pourrait avoir à considérer des fonctions de plus de deux variables indépendantes, comme $z=f(x,y,t)$, ou $f(x,y,z,t)=0$.

5. — On appelle *infiniment petit* une quantité qui tend vers zéro, et que l'on considère dans un état très-voisin de sa limite.

Il résulte de cette définition que si un infiniment petit α est ajouté à une quantité finie et déterminée a, on peut toujours négliger α devant a, puisque, à la limite, $a+\alpha$ se réduit à a. Il en serait de même si a tendait lui-même vers une limite finie a_1 ; car, à la limite, $a+\alpha$ se réduirait à a_1.

6. — Dans une question où l'on a divers infiniment petits à considérer, il y en a toujours un auquel on rapporte tous les autres, et que, pour cette raison, on appelle *infiniment petit principal*.

Soit α l'infiniment petit principal ; et soit β un autre infiniment petit qu'on lui compare. Si le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers une

limite finie k, différente de zéro, on dit que β est un *infiniment petit du premier ordre ;* et l'on peut le représenter par $k\alpha$. Si le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers un infiniment petit du premier ordre $k\alpha$, on dit que β est un *infiniment petit du second ordre ;* et l'on peut le représenter par $k\alpha^2$. Si le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers un infiniment petit de second ordre $k\alpha^2$, on dit que β est un *infiniment petit du troisième ordre ;* et l'on peut le représenter par $k\alpha^3$. En général, si un infiniment petit peut être représenté par $k\alpha^n$, on dit que c'est un *infiniment petit de l'ordre* n.

7. — La somme de plusieurs infiniment petits du même ordre, en nombre déterminé, est encore un infiniment petit du même ordre. Car si $k\alpha^n$, $k'\alpha^n$, $k''\alpha^n$, ..., représentent les infiniment petits considérés, leur somme sera

$$(k+k'+k''+\ldots)\,\alpha^n.$$

Or les termes étant en nombre déterminé, la quantité entre parenthèses est une quantité finie K ; la somme cherchée est donc $K\alpha^n$, c'est-à-dire un infiniment petit de l'ordre n.

8. — La différence de deux infiniment petits du même ordre $k\alpha^n$ et $k'\alpha^n$ est un infiniment petit du même ordre $(k-k')\,\alpha^n$.

9. — Le produit d'un infiniment petit $k\alpha^n$ par un facteur fini A est encore un infiniment petit du même ordre. Car $Ak\alpha^n$ ou $Ak\,.\,\alpha^n$ est encore le produit de α^n par un facteur fini Ak.

10. — Le rapport de deux infiniment petits du même ordre $k\alpha^n$ et $k'\alpha^n$ est une quantité généralement finie $\frac{k}{k'}$. (Ce n'est que dans des cas particuliers que ce rapport prend la valeur *zéro* ou une valeur *infinie.*)

11. — Un infiniment petit d'ordre n, soit $k'\alpha^n$, peut tou-

jours être négligé vis-à-vis d'un infiniment petit de l'ordre immédiatement inférieur $k\alpha^{n-1}$. Car la somme $k\alpha^{n-1}+k'\alpha^n$ peut s'écrire $\alpha^{n-1}(k+k'\alpha)$. Or l'infiniment petit $k'\alpha$ peut être négligé vis-à-vis de la quantité finie k, et il reste $k\alpha^{n-1}$.

Généralement, tout infiniment petit peut être négligé vis-à-vis d'un infiniment petit d'un ordre inférieur ; comme $k'\alpha^3$ devant $k\alpha$, par exemple, ou $k'\alpha^5$ devant $k\alpha^2$; etc.

12. — Lorsque deux variables x et y sont liées par une relation telle que

$$(1) \qquad y=f(x),$$

si l'on donne à x un accroissement Δx, il en résulte pour y un accroissement correspondant, positif ou négatif, Δy ; et l'on a

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x);$$

d'où l'on déduit par soustraction

$$(2) \qquad \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

Les accroissements Δx et Δy portent le nom de *différences*.

La fonction f est dite *continue*, si l'on peut prendre Δx assez petit pour que Δy puisse être rendu moindre que toute quantité donnée. Nous ne considérerons que les fonctions continues, les seules que l'on rencontre dans les applications. Dans ce cas, si Δx devient infiniment petit, il en est en général de même de Δy ; les différences prennent alors le nom de *différentielles;* et l'on remplace la caractéristique Δ par la caractéristique d. On écrit ainsi

$$(3) \qquad dy=f(x+dx)-f(x).$$

La différentielle dy de la fonction y est donc l'accroissement que $f(x)$ a éprouvé quand on a ajouté à x sa différentielle dx.

La partie de l'analyse qui a pour objet principal la recherche des différentielles est le *calcul différentiel;* et chercher la

différentielle d'une fonction est ce que l'on appelle *différentier* cette fonction.

Nous nous occuperons d'abord des fonctions d'une seule variable, en commençant par les fonctions explicites.

II. — PRINCIPES DE DIFFÉRENTIATION

§ I. — DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS EXPLICITES

FONCTIONS EXPLICITES D'UNE SEULE VARIABLE

13. — Divisons par Δx les deux membres de l'équation (2) du numéro précédent ; il viendra

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Si l'on fait tendre Δx vers *zéro*, Δy tendra aussi vers *zéro ;* mais le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne deviendra pas pour cela indéterminé ; il tend toujours, comme le calcul le démontrera, vers une limite déterminée; cette limite est encore une fonction de x, qui *dérive* de $f(x)$, et que pour cette raison on appelle *fonction dérivée* ou simplement *dérivée*, et qu'on désigne par la notation $f'(x)$.

On écrit en conséquence

$$(4)\qquad \lim.\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim.\ \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

On voit, d'après cette relation, que *la dérivée d'une fonction est la limite du rapport entre l'accroissement de cette fonction et l'accroissement de la variable*, et que, *pour obtenir cette dérivée, il faut, dans la fonction* $f(x)$, *changer* x *en* $x+\Delta x$, *retrancher* $f(x)$ *de* $f(x+\Delta x)$, *diviser le reste par* Δx, *et chercher la limite vers laquelle tend le quotient lorsque* Δx *tend vers zéro.*

14. — D'un autre côté, il résulte de la relation (4) que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est égal à $f'(x)$ plus une quantité ε qui tend vers zéro en même temps que Δx, et qu'on peut écrire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon.$$

Si l'on remplace les accroissements Δx et Δy par les infiniment petits dx et dy, ε devient aussi un infiniment petit, que l'on peut négliger vis-à-vis de la quantité finie $f'(x)$, et il reste

$$\frac{dy}{dx} = f'(x). \tag{5}$$

On en tire

$$dy = f'(x)dx. \tag{6}$$

Cette relation exprime que *la différentielle d'une fonction est égale à sa dérivée, multipliée par la différentielle de la variable.*

La relation (5) montre que réciproquement *la dérivée d'une fonction est égale à sa différentielle divisée par la différentielle de la variable.*

On voit que le calcul des différentielles revient au calcul des dérivées.

Remarque. Lorsque la dérivée est représentée par $\frac{dy}{dx}$, elle prend souvent le nom de *coefficient différentiel.*

15. — La relation (4) du n° 13 indique la marche à suivre pour trouver la dérivée d'une fonction explicite de x. Mais on n'applique directement cette règle qu'à trois fonctions fondamentales : x^m (pour m entier et positif), $\log x$, et $\sin x$. A l'aide de principes faciles à établir, on déduit ensuite de la différentiation de ces trois fonctions celle de toutes les autres.

16. — Soit donc d'abord $y = x^m$. Si, pour se conformer à

la règle du n° 13, on change x en $x + \Delta x$, par suite y en $y + \Delta y$, et qu'on développe, on obtient

$$y + \Delta y = x^m + m \,.\, x^{m-1} \Delta x + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} x^{m-2} \Delta x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} x^{m-3} \Delta x^3 + \ldots;$$

les termes non écrits contenant tous le facteur Δx à des puissances supérieures à la troisième. En retranchant ces deux égalités membre à membre, et divisant ensuite par Δx, on trouve

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} x^{m-2} \Delta x + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} x^{m-3} \Delta x^2 + \ldots;$$

les termes non écrits contenant tous le facteur Δx à des puissances supérieures à la seconde.

Faisons tendre Δx vers zéro; le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tendra vers la dérivée de y, que l'on représente habituellement par y'; tous les termes du second membre, à l'exception du premier, contenant le facteur Δx, tendront chacun vers zéro; et, comme ils sont en nombre fini, leur somme tendra elle-même vers zéro; il viendra donc

$$y' = m x^{m-1},$$

et par conséquent

$$dy = m x^{m-1} dx, \quad \text{ou} \quad d \,.\, x^m = m x^{m-1} dx,$$

c'est-à-dire que, *pour différentier* x^m, *il faut multiplier par l'exposant* m, *diminuer ensuite cet exposant d'une unité, et multiplier par* dx.

On tirerait ainsi, par exemple,

de $y = x^5$, $\qquad dy = 5x^4 dx$,
de $y = x^9$, $\qquad dy = 9x^8 dx$,

et ainsi de suite.

17. — Soit en second lieu

$$y = \log x,$$

le logarithme étant pris dans un système quelconque. Si l'on change x en $x + \Delta x$, et y en $y + \Delta y$, il vient

$$y + \Delta y = \log(x + \Delta x),$$

et, en retranchant membre à membre et divisant ensuite par Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(x+\Delta x) - \log x}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Si l'on faisait tendre immédiatement Δx vers zéro, le numérateur tendrait vers $\log 1$, qui est aussi égal à zéro. Pour éviter la forme $\frac{0}{0}$, on peut faire décroître Δx de telle manière qu'il soit toujours une partie aliquote de la quantité x, qu'on ne fait pas varier dans ce calcul; c'est-à-dire qu'on peut poser $\Delta x = \frac{x}{m}$, m étant un nombre que l'on pourra faire croître indéfiniment. On aura ainsi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\frac{x}{m}} = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}{x}.$$

Si maintenant, pour faire tendre Δx vers zéro, on fait tendre m vers l'infini, le numérateur du second membre tend vers la limite du logarithme de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ pour m infini, ou, ce qui revient au même, vers le logarithme de la limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$. Or, on démontre en algèbre (*) que cette limite

(*) Voy. l'Appendice.

est le nombre

$$e = 2,718281828...,$$

base des logarithmes népériens; il viendra donc

$$\lim . \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \frac{\log e}{x}, \quad \text{d'où} \quad dy = \log e . \frac{dx}{x},$$

ou

$$d . \log x = \log e . \frac{dx}{x}.$$

Si les logarithmes étaient népériens, $\log e$ serait égal à l'unité, et l'on aurait simplement

$$dy = \frac{dx}{x}.$$

REMARQUE. Pour cette raison, on donne à l'expression $\frac{dx}{x}$ le nom de *différentielle logarithmique* de x.

18. — Soit enfin $y = \sin x$. On en tire

$$y + \Delta y = \sin (x + \Delta x),$$

et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin (x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Si l'on faisait tendre immédiatement Δx vers zéro, le second membre prendrait la forme $\frac{0}{0}$. Pour l'éviter, on transforme, au numérateur, la différence des deux sinus en un produit, conformément à la formule

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \tfrac{1}{2} (p - q) . \cos \tfrac{1}{2} (p + q),$$

on obtient ainsi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta x . \cos (x + \frac{1}{2} \Delta x)}{\Delta x};$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\cdot \cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right).$$

Si maintenant on fait tendre Δx vers zéro, le rapport $\frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$ entre le sinus et l'arc tend vers l'unité; et le second facteur tend vers $\cos x$. Il vient donc

$$\lim.\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\cos x,\quad \text{d'où}\quad dy=\cos x\, dx,$$

ou

$$d.\sin x=\cos x\, dx.$$

19. — Nous allons maintenant exposer les principes qui permettent de ramener la différentiation d'une fonction explicite quelconque de x à celle des trois fonctions fondamentales que nous venons d'étudier.

I. *La différentielle d'une constante est nulle.* Car si l'on a $y=C$, la lettre C désignant une constante, on aura encore, en changeant x en $x+\Delta x$, et y en $y+\Delta y$,

$$y+\Delta y=C,$$

d'où il résulte $\Delta y=0$; et, par conséquent, à la limite, $dy=0$; ce qu'il fallait établir.

Remarque. On en déduit aussi $\frac{dy}{dx}=0$, ou $f'(x)=0$; c'est-à-dire que *la dérivée d'une constante est nulle.*

20. — II. *La différentielle de la somme ou de la différence de deux fonctions est égale à la somme ou à la différence des différentielles de ces fonctions.* Car si l'on a

$$y=u\pm v,$$

u et v désignant deux fonctions de x, quand on changera x en $x+\Delta x$, u deviendra $u+\Delta u$, v deviendra $v+\Delta v$, et y se changera en $y+\Delta y$. On aura donc

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)\pm(v+\Delta v).$$

En retranchant ces deux égalités membre à membre, on obtient

$$\Delta y = \Delta u \pm \Delta v,$$

et, à la limite,

$$dy = du \pm dv.$$

Si, par exemple, on avait

$$y = x^m + \sin x,$$

on en déduirait

$$dy = mx^{m-1}\,dx + \cos x\,dx.$$

Ce principe s'étendrait sans difficulté à la somme algébrique d'un nombre quelconque de fonctions.

21. — III. *La différentielle logarithmique d'un produit de plusieurs fonctions est égale à la somme des différentielles logarithmiques de ces fonctions.* Soit par exemple

$$(1) \qquad y = uvw,$$

u, v, w étant des fonctions de x. En prenant les logarithmes népériens des deux membres, on aura

$$\log' y = \log' u + \log' v + \log' w,$$

et, par conséquent, en vertu du principe II,

$$(2) \qquad \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w};$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

Remarques. 1° Si l'on multiplie membre à membre les deux relations (1) et (2), on obtient

$$(3) \qquad dy = vw\,du + uw\,dv + uv\,dw;$$

ce qui montre que *la différentielle d'un produit peut être obtenue en multipliant la différentielle de chaque facteur par le*

produit de tous les autres, et faisant la somme des résultats. Si, par exemple, on avait

$$y = x^m . \log x . \sin x,$$

on en déduirait

$$dy = \log x . \sin x . mx^{m-1} dx + x^m \sin x . \frac{\log e}{x} dx + x^m . \log x . \cos x dx.$$

2° *Si l'un des facteurs est constant, on obtient la différentielle cherchée en multipliant le facteur constant par la différentielle du produit des facteurs variables.* Car si u est constant, du est nul, et la relation (3) devient

$$dy = uw\,dv + uv\,dw = u\,(w\,dv + v\,dw)\ ;$$

or $w\,dv + v\,dw$ est la différentielle du produit vw.

Si, par exemple, on avait

$$y = 4x^5 \log' x,$$

on en déduirait

$$y = 4\left[5\,x^4 . \log' x\,dx + x^5 . \frac{1}{x}\,dx\right]$$

ou

$$dy = 4x^4\,(1 + 5 \log' x)\,dx.$$

22. — IV. *La différentielle logarithmique du quotient de deux fonctions est égale à la différentielle logarithmique du dividende, moins la différentielle logarithmique du diviseur.* Car si l'on a

$$(1) \qquad y = \frac{u}{v},$$

on en déduit $yv = u$, et, en vertu du principe précédent,

$$(2) \qquad \frac{dy}{y} + \frac{dv}{v} = \frac{du}{u}, \text{ d'où } \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}\ ;$$

ce qu'il s'agissait d'établir.

Remarques. 1° Si l'on multiplie membre à membre les relations (1) et (2), on obtient

$$(3) \qquad dy = \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2};$$

c'est-à-dire, que pour obtenir la différentielle d'un quotient, il faut *multiplier le dénominateur par la différentielle du numérateur, retrancher de ce produit celui du numérateur par la différentielle du dénominateur, et diviser le résultat par le carré du dénominateur.*

Si, par exemple, on avait

$$y = \frac{x^2}{\sin x},$$

on en déduirait

$$dy = \frac{\sin x . 2x\,dx - x^2 \cos x\,dx}{\sin^2 x} = \frac{x(2\sin x - x\cos x)\,dx}{\sin^2 x}.$$

2° Si le dénominateur v est constant, dv est nul, et il reste

$$dy = \frac{du}{v};$$

c'est-à-dire que, pour avoir la différentielle du quotient, il suffit de *différentier le numérateur et d'écrire au-dessous le dénominateur constant.*

Ainsi $y = \frac{\sin x}{5}$ donnerait $dy = \frac{\cos x\,dx}{5}$.

3° Si le numérateur u est constant, du est nul, et il reste

$$dy = -\frac{udv}{v^2}.$$

Si, par exemple, on avait

$$y = \frac{5}{x^2},$$

on en déduirait

$$dy = -\frac{5 \cdot 2xdx}{x^4} = -10\frac{dx}{x^3}.$$

23. — *Fonctions de fonctions.* Il peut arriver que y, au lieu d'être directement fonction de x, soit fonction d'une variable intermédiaire u, qui est elle-même fonction de x, et qu'on ait, par exemple, $y = f(u)$, avec $u = \varphi(x)$. On dit alors que y est une *fonction de fonction*. Si x varie de Δx, u variera de Δu, et y variera de Δy. Or on a identiquement

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

et à la limite

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx};$$

ce qui exprime que *la dérivée de* y *par rapport à* x *est égale à la dérivée de* y *par rapport à la fonction intermédiaire* u, *multipliée par la dérivée de* u *par rapport à* x. En multipliant par dx, on obtient la différentielle de y.

Si, par exemple, on a

$$y = \log u \quad \text{avec} \quad u = x^m,$$

on en déduit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{u} m x^{m-1} = \frac{\log e \cdot m x^{m-1}}{x^m} = \frac{m \log e}{x},$$

et par suite

$$dy = m \log e \cdot \frac{dx}{x}.$$

24. — Au lieu d'une fonction intermédiaire, il pourrait y en avoir plusieurs. On peut avoir, par exemple, $y = f(u)$, avec $u = \varphi(v)$ et $v = \psi(x)$.



Si x varie de Δx, v variera de Δv; par suite, u variera de Δu, et y de Δy. Or, on a identiquement

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

et à la limite

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx};$$

c'est-à-dire que, pour obtenir la dérivée de y par rapport à x, il faut prendre la dérivée de y par rapport à u, la multiplier par la dérivée de u par rapport à v, et par la dérivée de v par rapport à x.

En multipliant ensuite par dx, on obtiendra la différentielle de y.

Si l'on a, par exemple

$$y = \log u, \quad u = v^m, \quad v = \sin x,$$

on en déduira

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{u} \cdot m\, v^{m-1} \cdot \cos x = \frac{m \log e \cdot (\sin x)^{m-1} \cdot \cos x}{(\sin x)^m},$$

d'où

$$dy = \frac{m \log e \cdot \cos x\, dx}{\sin x} = m \log e \cdot \cot x\, dx.$$

15. — Il peut arriver encore que y et x soient tous deux fonctions d'une troisième variable α, et qu'on ait, par exemple, $y = \varphi(\alpha)$ avec $x = \psi(\alpha)$.

Si α varie de $\Delta\alpha$, x variera de Δx, et y de Δy. Or on a identiquement

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(\frac{\Delta y}{\Delta \alpha}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta \alpha}\right)}, \quad \text{et à la limite} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)}{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)};$$

c'est-à-dire que, pour obtenir alors la dérivée de y par rapport à x, *il faut prendre la dérivée de* y *par rapport à* α, *et la diviser par la dérivée de* x *par rapport à* α.

Cette dérivée est exprimée en fonction de α; on l'obtiendrait en fonction de x, en mettant pour α sa valeur en x tirée de la relation $x=\psi(\alpha)$.

En multipliant ensuite par dx, on aurait la différentielle de y.

Si, par exemple, on a

$$x=\sin\alpha \quad \text{et} \quad x=k\alpha,$$

on en tire

$$\frac{dy}{d\alpha}=\cos\alpha \quad \text{et} \quad \frac{dx}{d\alpha}=k, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\cos\alpha}{k}.$$

Mais on a $\alpha=\frac{x}{k}$; on peut donc écrire

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos\frac{x}{k}}{k}, \quad \text{et par suite} \quad dy=\cos\frac{x}{k}.\frac{dx}{k}.$$

FONCTIONS EXPLICITES DE PLUSIEURS VARIABLES

26. — Considérons la fonction

(1) $$z=f(u,v),$$

dans laquelle u et v sont des variables indépendantes quelconques. On peut d'abord ne faire varier que l'une des variables indépendantes, et changer par exemple u en $u+du$, en regardant v comme constant. La variation infiniment petite que subit alors la fonction f est ce que l'on appelle sa *différentielle partielle* prise par rapport à u. Elle est égale à la *dérivée partielle* de f prise par rapport à u, multipliée par du (14). On représente cette dérivée partielle de deux manières : soit par la notation $f'_u(u, v)$, soit par la notation $\frac{df}{du}$, dans laquelle

il ne faut pas voir un quotient, mais une simple manière d'écrire la dérivée. L'accroissement infiniment petit que prend $f(u,v)$ quand on fait croître u de du peut donc s'écrire

$$f'_u(u,v)\,.\,du \quad \text{ou} \quad \frac{df}{du}\,.\,du.$$

De même, si l'on regardait u comme constant, et que l'on fît varier v de dv, la fonction $f(u,v)$ varierait d'une quantité infiniment petite qui serait sa différentielle partielle prise par rapport à v, et qui aurait pour valeur

$$f'_v(u,v)\,dv \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dv}\,.\,dv,$$

l'une quelconque des notations $f'_v(u,v)$ ou $\frac{df}{dv}$ représentant la dérivée partielle de la fonction par rapport à v.

27. — Supposons maintenant que l'on fasse varier à la fois u et v, l'un de du et l'autre de dv, la fonction z variera d'une quantité infiniment petite dz, que l'on appelle sa *différentielle totale*, et qui a pour valeur

$$dz = f(u+du, v+dv) - f(u,v).$$

Or, on ne troublera pas cette valeur en retranchant et ajoutant à la fois la quantité $f(u, v+dv)$; on peut donc écrire

$$(2) \quad dz = f(u+du, v+dv) - f(u, v+dv) + f(u, v+dv) - f(u,v).$$

Mais l'ensemble des deux premiers termes du second membre n'est autre chose que la différentielle partielle de la fonction $f(u, v+dv)$ prise par rapport à u, ou la différentielle partielle par rapport à u de la fonction $f(u, v)$, puisque dv est aussi voisin de zéro qu'on le voudra et disparaît devant la quantité finie v ; l'ensemble de ces deux termes peut donc s'écrire

$$f'_u(u,v)\,.\,du \quad \text{ou} \quad \frac{df}{du}\,.\,du.$$

De même, l'ensemble des deux derniers termes n'est autre

chose que la différentielle partielle de $f(u, v)$ prise par rapport à v ; ils peuvent donc s'écrire

$$f'_v(u,v)\,dv \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dv}.\,dv.$$

On a donc enfin

$$dz = f'_u(u,v)\,du + f'_v(u,v)\,dv, \tag{3}$$

ou

$$dz = \frac{df}{du}.\,du + \frac{df}{dv}.\,dv; \tag{4}$$

ce qui revient à dire que *la différentielle totale est la somme des différentielles partielles.*

28. — Supposons que l'on ait

$$z = f(u, v, w), \tag{5}$$

u, v, w désignant trois variables indépendantes quelconques. Si l'on fait varier l'une d'elles seulement, et qu'on fasse croître u de du par exemple, la fonction variera d'une quantité infiniment petite qui sera sa différentielle partielle par rapport à u, et que l'on pourra écrire

$$f'_u(u, v, w).\,du \quad \text{ou} \quad \frac{df}{du}.\,du.$$

De même pour les autres variables.

Si on les fait varier toutes les trois, et que u, v, w croissent respectivement de du, dv, dw, la fonction z variera d'une quantité infiniment petite dz, qui sera sa différentielle totale, et l'on aura

$$dz = f(u + du,\ v + dv,\ w + dw) - f(u, v, w);$$

mais cette relation peut s'écrire

$$\begin{aligned} dz = & f(u + du,\ v + dv,\ w + dw) - f(u,\ v + dv,\ w + dw) \\ & + f(u,\ v + dv,\ w + dw) - f(u, v,\ w + dw) \\ & + f(u, v,\ w + dw) - f(u, v, w). \end{aligned}$$

Or la première ligne du second membre est la différentielle partielle de $f(u, v+\Delta v, w+\Delta w)$ prise par rapport à u, ou, ce qui revient au même, la différentielle partielle de $f(u, v, w)$, puisque dv et dw sont aussi voisins de zéro qu'on le voudra, et disparaissent devant les quantités finies v et w. De même, la seconde ligne est la différentielle partielle de $f(u, v, w+dw)$, par rapport à v, ou, ce qui revient au même, la différentielle partielle de $f(u, v, w)$, puisque dw est aussi voisin de zéro qu'on le voudra et disparaît devant w. Enfin la troisième ligne est la différentielle partielle de $f(u, v, w)$ par rapport à w. On a donc

$$(6)\quad dz = f'_u(u, v, w)\, du + f'_v(u, v, w)\, dv + f'_w(u, v, w)\, dw,$$

ou

$$(7)\quad dz = \frac{df}{du} du + \frac{df}{dv} dv + \frac{df}{dw} dw;$$

ce qui signifie encore que *la différentielle totale est égale à la somme des différentielles partielles.*

Ce principe pourrait être étendu de la même manière à une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes.

FONCTIONS COMPOSÉES

29. — Reprenons l'équation

$$z = f(u, v).$$

Au lieu de regarder u et v comme des variables indépendantes, supposons-les toutes deux fonctions d'une même variable x; la fonction z sera alors ce que l'on appelle une *fonction composée* de x. Or cette supposition ne changera rien à la démonstration du n° 27; on aura donc encore

$$dz = f'_u(u, v)\, du + f'_v(u, v)\, dv.$$

Mais u et v étant des fonctions de x, on a alors

$$du = u'\,dx, \quad \text{et} \quad dv = v'\,dx,$$

u' et v' désignant les dérivées de u et de v par rapport à x. On aura donc

$$dz = f'_u(u, v)\,u'\,dx + f'_v(u, v)\,v'dx,$$

et, en divisant par dx,

$$\frac{dz}{dx} = f'_u(u, v)\,.\,u' + f'_v\,.(u, v)\,.\,v';$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$\frac{dz}{dx} = \frac{df}{du}\,.u' + \frac{df}{dv}\,.\,v';$$

c'est-à-dire, en vertu du principe sur la différentiation des fonctions de fonctions (23), que *la dérivée d'une fonction composée* f (u, v) *est la somme de ses dérivées partielles par rapport à* u *et à* v, *obtenues en regardant successivement* u *et* v *comme des fonctions de* x.

On arriverait à une conclusion analogue pour la fonction $z = f(u, v, w)$, si u, v et w étaient des fonctions d'une même variable x, c'est-à-dire qu'on aurait

$$\frac{dz}{dx} = f'_u(u, v, w)\,.u' + f'_v(u, v, w)\,.\,v' + f'_w(u, v, w)\,.\,w';$$

ce qu'on peut écrire aussi

$$\frac{dz}{dx} = \frac{df}{du}\,.\,u' + \frac{df}{dv}\,.\,v' + \frac{df}{dw}\,.\,w'.$$

§ 2. — DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS IMPLICITES

30. — Considérons d'abord l'équation

(1) $$f(x, y) = 0,$$

dans laquelle y est dite fonction implicite de x. Si x varie de dx, y variera d'une quantité correspondante dy liée à dx par la relation

$$f(x + dx,\ y + dy) = 0,$$

et, en retranchant ces deux relations membre à membre, on obtient

$$f(x + dx,\ y + dy) - f(x, y) = 0;$$

ce qui signifie que la différentielle totale de la fonction f est constamment nulle. Or, d'après ce qu'on a vu au n° 29, cette propriété peut s'écrire

(2) $$f'_x(x, y) \,.\, 1 + f'_y(x, y) \,.\, y' = 0,$$

ou

(2) $$\frac{df}{dx} + y' \,.\, \frac{df}{dy} = 0,$$

attendu que x est une fonction de x dont la dérivée est 1, et que y est une fonction de x dont la dérivée est y'. On tire de là

(3) $$y' = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)},$$

c'est-à-dire que, *pour obtenir la dérivée d'une fonction implicite de* x, *exprimée par l'équation* f (x, y) = 0, *il faut prendre la dérivée partielle du premier membre par rapport à* x, *la diviser par la dérivée partielle par rapport à* y, *et changer le signe du résultat.*

Soit, par exemple, l'équation

$$y^3 - 3\,axy + x^3 = 0\,,$$

on trouvera

$$f'_x(x, y) = -3\,(ay - x^2), \quad f'_y\,(x, y) = 3\,(y^2 - ax),$$

et par suite

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

31. — Remarque. Lorsque la relation entre x et y se présente sous la forme $\varphi\,(y) = \psi\,(x)$, dans laquelle ces variables sont séparées, l'application de la règle précédente donne

$$y' = \frac{\psi'\,(x)}{\varphi'\,(y)}, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'\,(x)}{\varphi'\,(y)};$$

d'où l'on tire

$$\varphi'\,(y)\,dy = \psi'\,(x)\,dx\,;$$

c'est-à-dire que *quand les variables* x *et* y *sont séparées, la différentielle du premier membre est égale à la différentielle du second;* ce qu'on aurait pu prévoir, car pour que deux fonctions de variables différentes soient constamment égales, il faut que leurs accroissements infiniment petits simultanés soient égaux.

32. — Les règles qui précèdent permettent de généraliser facilement le principe sur la différentiation de la fonction x^m, en l'étendant au cas de m fractionnaire ou négatif.

I. En effet, soit d'abord

$$y = x^{\frac{p}{q}},$$

p et q étant deux nombres entiers. En élevant les deux membres à la puissance q, on obtient

$$y^q = x^p,$$

et, par conséquent, en vertu de la remarque ci-dessus (31),

$$qy^{q-1}dy = px^{p-1}dx,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}.y}{y^q},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}.x^{\frac{p}{q}}}{x^p} = \frac{p}{q}.x^{\frac{p}{q}-1};$$

ce qui revient à la règle du n° 16.

Si, par exemple on a,

$$y = x^{\frac{3}{2}},$$

on en déduira

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on a

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},$$

on en déduira

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

II. Soit maintenant

$$y = x^{-m};$$

on en tire

$$yx^m - 1 = 0,$$

et, en appliquant la règle exprimée par l'équation (2) du n° 30,

$$myx^{m-1} + x^m.y' = 0;$$

d'où

$$y' = -m\frac{y}{x} = -m.\frac{x^{-m}}{x} = -mx^{-m-1};$$

ce qui revient encore à la règle du n° 16.

Si, par exemple, on a

$$y = x^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{on en tire} \quad y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$$

Si l'on a

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad \text{on en tire} \quad y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

33. — Soit maintenant la relation $f(x, y, z) = 0$, dans laquelle z est une fonction implicite des deux variables x et y. Si x et y varient respectivement de dx et de dy, z variera d'une quantité correspondante dz liée à dx et à dy, par la relation

$$f(x + dx, y + dy, z + dz) = 0.$$

En retranchant les deux relations membre à membre, on aura donc

$$f(x + dx, y + dy, z + dy) - f(x, y, z) = 0;$$

ce qui exprime que la différentielle totale de la fonction f est constamment nulle.

Or, d'après ce qu'on a vu au n° 28, cette propriété est exprimée par la relation

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0.$$

(Il faut bien se rappeler que les notations $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$ ne représentent pas des quotients, mais bien les dérivées partielles de la fonction $f(x, y, z)$, par rapport à x, à y et à z). La relation ci-dessus exprime donc que *la somme des différentielles par-*

tielles de la fonction f (x, y, z), *par rapport aux trois variables est égale à zéro.*

On démontrerait de même que si l'on avait $f(x, y, z, t) = 0$, on en pourrait déduire

$$\frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy + \frac{df}{dz}\,dz + \frac{df}{dt}\,dt = 0.$$

III. — APPLICATION DES PRINCIPES DE DIFFÉRENTIATION AUX FONCTIONS LES PLUS USITÉES

24. — *Fonctions algébriques rationnelles.* Les fonctions que l'on rencontre le plus souvent sont les fonctions algébriques entières, telles que

$$(1) \qquad y = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + Tx + U.$$

La différentielle d'une somme étant la somme des différentielles de ses parties (20), il faut, pour obtenir la différentielle de y, différentier successivement chacun des termes du second membre. Or, chacun de ces termes est le produit d'un facteur constant par une puissance de x ; sa différentielle s'obtient donc (21, 2°) en multipliant le facteur constant par la différentielle du facteur variable. Or, celui-ci étant une puissance de x, on obtient sa différentielle en multipliant par l'exposant de x, diminuant cet exposant d'une unité et introduisant le facteur dx (16). En appliquant ces divers principes, on aura donc

$$dy = [mAx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} + (m-2)Cx^{m-3} \ldots + T]\,dx\,;$$

le terme U disparaît, attendu que la différentielle d'une constante est nulle (19).

Si l'on a, par exemple,

$$y = \frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7,$$

on trouvera

$$dy = (2x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x - 4)\,dx.$$

23. — Après les fonctions algébriques entières, celles qu'on rencontre le plus souvent sont les fractions algébriques ; leur différentielle s'obtient en appliquant la règle donnée au n° 22 (Rem. 1°) pour la différentiation d'un quotient.

Si l'on a, par exemple,

$$(1)\qquad y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4},$$

on obtiendra successivement

$$dy = \frac{(x^2-4x+4)d(x^2-5x+6) - (x^2-5x+6)d(x^2-4x+4)}{(x^2 - 4x + 4)^2}dx$$

$$= \frac{(x^2 - 4x + 4)(2x - 5) - (x^2 - 5x + 6)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 4)^2}dx$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 4}{(x^2 - 4x - 4)^2}dx$$

ou

$$(2)\qquad dy = \frac{dx}{(x - 2)^2}.$$

Dans cet exemple il y a une vérification facile : les deux termes de la fraction (1) proposée admettent le facteur $x - 2$; si on le supprime, il reste

$$y = \frac{x - 3}{x - 2}.$$

En appliquant la règle de différentiation d'un quotient, on obtient

$$dy = \frac{(x-2)\,d(x-3) - (x-3)\,d(x-2)}{(x - 2)^2} = \frac{(x-2) - (x - 3)}{(x - 2)^2}dx$$

$$= \frac{dx}{(x - 2)^2}$$

comme plus haut.

36. — *Fonctions algébriques irrationnelles.* La règle pour la différentiation d'un radical du second degré peut être facilement établie. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}.$$

Posons

$$u=ax^2+bx+c,$$

il viendra

$$y=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$$

et, en différentiant y comme une fonction de fonction (23),

$$dy=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{(2ax+b)\,dx}{2\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

c'est-à-dire que, *pour obtenir la différentielle d'un radical du second degré, il faut prendre la différentielle de la quantité placée sous le radical, et la diviser par le double du radical.*

37. — On suit une marche analogue pour différentier un radical d'indice quelconque. Soit

$$y=\sqrt[n]{u}=u^{\frac{1}{n}},$$

u étant une fonction de x. On en tirera (32)

$$dy=\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}du=\frac{1}{n}\frac{du}{u^{1-\frac{1}{n}}}=\frac{du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}},$$

d'où il serait facile de déduire une règle.

Soit, par exemple,

$$y=\sqrt[3]{ax^3+bx^2+cx+d},$$

on trouvera

$$dy=\frac{(3ax^2+2bx+c)\,dx}{3\sqrt[3]{(ax^3+bx^2+cx+d)^2}}.$$

38. — On peut rencontrer des expressions dans lesquelles les radicaux sont mêlés à des fonctions rationnelles, entières ou fractionnaires.

Soit, comme exemple,

$$y = \frac{(1+2x^2)\sqrt{1-x^2}}{3x^3}.$$

En appliquant d'abord la règle pour la différentiation d'un quotient, après avoir mis en facteur $\frac{1}{3}$, on trouvera

$$dy = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3 d(1+2x^2)\sqrt{1-x^2} - (1+2x^2)\sqrt{1-x^2}\,.\,dx^3}{x^6}$$

ou, en effectuant les différentiations indiquées au numérateur,

$$dy = \frac{1}{3}x^3\,\frac{\left[4x\sqrt{1-x^2} - \frac{(1+2x^2)x}{\sqrt{1-x^2}}\right] - (1+2x^2)\sqrt{1-x^2}\,.3x^2}{x^6}\,dx$$

Supprimant le facteur x^2 commun aux deux termes, et multipliant ensuite ces deux termes par $\sqrt{1-x^2}$, il vient

$$dy = \frac{1}{3}\,\frac{x[4x(1-x^2)-(1+2x^2)x] - 3(1+2x^2)(1-x^2)}{x^4\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Effectuant les calculs au numérateur, et réduisant, on trouve enfin

$$dy = -\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}.$$

On trouvera de même que

$$y = \frac{(8x^4+4x^2+3)\sqrt{x^2-1}}{15x^5}$$

donne par la différentiation

$$dy = \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}}.$$

39. — *Fonctions exponentielles et logarithmiques.* Soit maintenant à différentier la fonction exponentielle

$$y = a^x.$$

La méthode la plus simple consiste à prendre d'abord les logarithmes des deux membres et à écrire

$$\log y = x \log a.$$

Les variables étant séparées, on peut (31) égaler les différentielles des deux membres, et écrire (17) en conséquence

$$\frac{\log e . dy}{y} = \log a . dx,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log a}{\log e} . y = \frac{\log a}{\log e} . a^x, \quad \text{d'où} \quad dy = \frac{\log a}{\log e} a^x dx.$$

Ainsi, pour obtenir la dérivée de a^x, il suffit de multiplier par le facteur constant $\frac{\log a}{\log e}$.

Si l'on avait $a = e$, il viendrait

$$y = e^x \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = e^x.$$

Ainsi la fonction e^x jouit de cette propriété qu'elle est égale à sa dérivée.

40. — L'exponentielle $y = a^{-x}$ peut être ramenée à la précédente en posant $-x = u$; d'où $du = -dx$. On a alors

$$y = a^u;$$

par suite

$$dy = \frac{\log a}{\log e} a^u du = -\frac{\log a}{\log e} a^{-x} dx.$$

Si a était égal à e, on aurait

$$y = e^{-x} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = -e^{-x};$$

ainsi la fonction e^{-x} est égale et de signe contraire à sa dérivée.

41. — On peut avoir en exposant le produit de x par une constante. Soit, par exemple, $y = a^{mx}$. On posera $u = mx$, d'où $du = mdx$. On aura alors

$$dy = \frac{\log a}{\log e} a^u \, du = \frac{\log a}{\log e} a^{mx} \, .\, mdx.$$

On trouverait de même que $y = a^{-mx}$ donne par la différentiation

$$dy = -\frac{\log a}{\log e} a^{-mx} \, mdx.$$

On rencontre souvent des expressions de la forme

$$y = \text{A}e^{mx} + \text{B}e^{-mx}.$$

On en tire, en appliquant les règles précédentes,

$$dy = m\,(\text{A}e^{mx} - \text{B}e^{-mx})\,dx.$$

42. — On a vu au n° 17 comment on différentie le logarithme de x; mais on peut avoir à différentier le logarithme d'une fonction de x, par exemple,

$$y = \log'\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right).$$

On posera

$$u = x + \sqrt{1 + x^2}, \quad \text{d'où} \quad du = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)dx,$$

on aura alors

$$y = \log' u, \quad \text{d'où} \quad dy = \frac{du}{u} = \frac{\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx}{x + \sqrt{1+x^2}},$$

ou

$$dy = \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)\, dx}{(x + \sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

43. — On pourrait être embarrassé pour différentier la fonction $y = x^x$. Il suffit pour cela de prendre les logarithmes népériens des deux membres, ce qui donne

$$\log' y = x \log' x.$$

Les variables étant séparées, on peut égaler les différentielles des deux membres (31), et l'on trouve

$$\frac{dy}{y} = \left(\log' x + x \cdot \frac{1}{x}\right) dx = (1 + \log' x)\, dx;$$

d'où

$$dy = y\,(1 + \log' x)\, dx = x^x (1 + \log' x)\, dx.$$

44. — *Fonctions circulaires.* On a vu (18) que la différentielle de sin x est cos $x\,dx$.

Soit maintenant $y = \cos x$. Pour différentier cette fonction, on pourrait suivre une marche analogue à celle du n° 18; mais il est plus simple d'opérer de la manière suivante. Posons

$$x = \frac{\pi}{2} - u, \quad \text{d'où} \quad u = \frac{\pi}{2} - x, \quad \text{et} \quad du = -dx.$$

Nous aurons

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u,$$

et par conséquent

$$dy = \cos u\, du = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).(-dx) = -\sin x\, dx.$$

Soit $y = \operatorname{tang} x$. On pourra écrire

$$y = \frac{\sin x}{\cos x};$$

et, en appliquant la règle pour la différentiation d'un quotient (22), on trouvera

$$dy = \frac{\cos x . d\sin x - \sin x . d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Soit de même $y = \cot x$; on écrira

$$y = \frac{\cos x}{\sin x},$$

d'où

$$dy = \frac{\sin x . d\cos x - \cos x\, d\sin x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} dx$$
$$= -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

45. — La sécante et la cosécante sont rarement employées; mais la différentiation de ces fonctions n'offrirait aucune difficulté. Soit, par exemple,

$$y = \operatorname{séc} x = \frac{1}{\cos x}.$$

On posera

$$u = \cos x, \quad \text{d'où} \quad du = -\sin x\, dx.$$

On aura alors

$$y = \frac{1}{u} = u^{-1};$$

et par conséquent

$$dy = -u^{-2}\,du = -\frac{du}{u^2},$$

ou bien

$$dy = \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}.$$

Pour $y = \operatorname{coséc} x$, on trouverait

$$dy = -\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}.$$

46. — Au lieu des fonctions circulaires directes dont nous venons de parler, on peut avoir affaire aux fonctions circulaires inverses.

Soit, par exemple,

$$y = \text{arc.}\sin x;$$

on en déduira d'abord

$$x = \sin y, \quad \text{d'où} \quad dx = \cos y\,dy,$$

ou

$$dx = \sqrt{1 - \sin^2 y}\,.\,dy = \sqrt{1 - x^2}\,.\,dy;$$

d'où

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Soit, en second lieu,

$$y = \text{arc.}\cos x;$$

on en déduira

$$x = \cos y,$$

d'où

$$dx = -\sin y\,dy = -\sqrt{1 - \cos^2 y}\,.\,dy,$$

ou

$$dx = -\sqrt{1 - x^2}\,.\,dy,$$

d'où

$$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

différentielle dont la forme ne diffère de la précédente que par le signe.

Soit encore

$$y = \text{arc tang}\, x\,;$$

on en déduit

$$x = \text{tang}\, y\,;$$

d'où

$$dx = \frac{dy}{\cos^2 y} = (1 + \text{tang}^2 y)\, dy,$$

ou

$$dx = (1 + x^2)\, dy\,,$$

d'où

$$dy = \frac{dx}{1 + x}.$$

Soit enfin

$$y = \text{arc cot}\, x\,;$$

on en déduit

$$x = \cot y.$$

d'où

$$dx = -\frac{dy}{\sin^2 y} = -(1 + \cot^2 y)\,.\,dy\,;$$

ou

$$dx = -(1 + x^2)\, dy\,,$$

d'où

$$dy = -\frac{dx}{1 + x},$$

différentielle dont la forme ne diffère de la précédente que par le signe.

47. — On peut rencontrer des fonctions analogues aux précédentes (45, 46), mais dans lesquelles x est multiplié par un facteur constant.

Soit, par exemple,

$$y = \sin mx;$$

d'après la règle de la différentiation des fonctions de fonctions (23), ou, en prenant mx pour variable, on trouvera

$$dy = \cos mx \,.\, dmx = m \cos mx \, dx;$$

c'est-à-dire qu'il faut opérer comme au n° 45, et multiplier le résultat par m.

Soit de même

$$y = \text{arc} \sin \frac{x}{a};$$

en appliquant les mêmes règles, on trouvera

$$dy = \frac{d \,.\, \frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{\frac{1}{a}\, dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

On trouvera semblablement que

$$y = \text{tang}\, mx$$

donne

$$dy = \frac{mdx}{\cos^2 mx},$$

et que

$$y = \text{arc tang} \frac{x}{a}$$

donne

$$dy = \frac{d \,.\, \frac{x}{a}}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{adx}{a^2 + x^2}.$$

48. — Enfin les fonctions circulaires peuvent se trouver mêlées avec des fonctions algébriques ou logarithmiques. Nous en donnerons deux exemples.

Soit d'abord

$$y = c - \log' \cot \tfrac{1}{2} x.$$

Posons

$$\tfrac{1}{2} x = v, \quad \text{et} \quad \cot v = u;$$

il viendra

$$y = c - \log' u;$$

par conséquent

$$dy = -\frac{du}{u};$$

mais

$$du = -\frac{dv}{\sin^2 v},$$

et

$$dv = \tfrac{1}{2}\, dx;$$

il viendra donc, en substituant

$$dy = -\frac{\dfrac{-\frac{1}{2}\, dx}{\sin^2 \frac{1}{2} x}}{\cot. \frac{1}{2} x} = \frac{dx}{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = \frac{dx}{\sin x}.$$

Soit, en second lieu,

$$y = \mathrm{R} \operatorname{arc.cos} \left(1 - \frac{x}{\mathrm{R}}\right) - \sqrt{2\mathrm{R}x - x^2}.$$

Posons

$$\mathrm{A} = \mathrm{R} \operatorname{arc} \cos \left(1 - \frac{x}{\mathrm{R}}\right), \quad u = 1 - \frac{x}{\mathrm{R}}, \quad \mathrm{B} = \sqrt{2\mathrm{R}x - x^2};$$

il viendra

$$y = \mathrm{A} - \mathrm{B}, \quad \text{d'où} \quad dy = d\mathrm{A} - d\mathrm{B};$$

$A = R \arc\cos u$, d'où

$$dA = -R\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-\left(1-\frac{x}{R}\right)}}$$

ou

$$dA = \frac{R\,dx}{\sqrt{2Rx - x^2}}$$

et

$$dB = \frac{(2R-2x)\,dx}{2\sqrt{2Rx-x^2}} = \frac{(R-x)\,dx}{\sqrt{2Rx-x^2}};$$

par conséquent

$$dy = \frac{R-(R-x)}{\sqrt{2Rx-x^2}}\,dx = \frac{x\,dx}{\sqrt{2Rx-x^2}} = dx\sqrt{\frac{x}{2R-x}}.$$

On peut, à l'aide des règles ci-dessus établies, différentier de même toutes les fonctions d'une variable.

49. — Les fonctions composées peuvent toujours être différentiées directement comme des fonctions de la variable indépendante x, et il y a rarement avantage à appliquer la règle du n° 29, qui nous a servi surtout à établir la méthode de différentiation des fonctions implicites. Cependant, pour compléter ce que nous avons à dire sur ce sujet, nous traiterons un exemple de fonction composée.

Soit

$$(1) \qquad z = u\sqrt{1-v^2} + \frac{v}{u} = f(u, v),$$

relation dans laquelle on suppose $u = e^x$ et $v = \sin x$.

On aura d'abord

$$\frac{df}{du} = \sqrt{1-v^2} - \frac{v}{u^2} \quad \text{et} \quad \frac{df}{dv} = \frac{-uv}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{v}{u}.$$

Par conséquent

$$(2) \quad dz = \left(\sqrt{1-v^2} - \frac{v}{u^2}\right) du - \left(\frac{uv}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{1}{u}\right) dv.$$

Ce résultat peut être facilement vérifié. Si l'on y met pour u et v leurs valeurs, en remarquant que,

$$du = e^x dx \quad \text{et} \quad dv = \cos x\, dx,$$

on trouve

$$dz = \left(\cos x - \frac{\sin x}{e^{2x}}\right) e^x dx - \left(\frac{e^x \sin x}{\cos x} + \frac{1}{e^x}\right) \cos x\, dx;$$

ce qu'on peut écrire

$$(3) \quad dz = (e^x \cos x - e^{-x} \sin x - e^x \sin x - e^{-x} \cos x)\, dx.$$

Or si dans la relation (1) on met pour u et v leurs valeurs, on a

$$z = e^x \cos x + e^{-x} \sin x,$$

et si l'on différentie directement, en appliquant les règles pour la différentiation d'une somme et d'un produit, on retombe sur le résultat exprimé par la relation (3).

IV. — DIFFÉRENTIELLES SUCCESSIVES DES FONCTIONS

§ I. — FONCTIONS EXPLICITES D'UNE VARIABLE

30. — La dérivée d'une fonction de x étant elle-même une fonction de x, on peut en prendre la dérivée ; on obtient ainsi ce que l'on appelle la *dérivée seconde* de la fonction. La dérivée première étant représentée par $f'(x)$ ou par y', on représente de même la dérivée seconde par $f''(x)$ ou par y''.

Cette seconde dérivée étant encore une fonction de x, on peut en prendre la dérivée ; et l'on obtient ce que l'on appelle

la *dérivée troisième*, que l'on représente par $f'''(x)$ ou par y'''.

En prenant la dérivée de la dérivée troisième, on obtiendrait la *dérivée quatrième*, que l'on représenterait par $f^{\text{IV}}(x)$ ou par y^{IV}, et ainsi de suite.

21. — Mais on emploie encore, pour représenter ces dérivées successives, une autre notation qu'il faut connaître.

On a vu (14) que la dérivée première peut être représentée par $\frac{dy}{dx}$, et porte alors plus particulièrement le nom de *coefficient différentiel*. Par analogie, on peut représenter la dérivée seconde y'', c'est-à-dire la dérivée de y', par $\frac{dy'}{dx}$; et, en mettant pour y' son expression $\frac{dy}{dx}$, on a

$$y'' = \frac{d.\frac{dy}{dx}.}{dx}$$

Or, dans le cours d'un même calcul, l'accroissement infiniment petit dx attribué à la variable indépendante est toujours considéré comme constant, ce qui revient à supposer que cette variable croit en progression arithmétique dont la raison est dx. L'expression ci-dessus peut donc s'écrire

$$y'' = \frac{d.dy}{dx^2}.$$

Au lieu d'écrire deux fois le signe d de la différentiation, on convient de ne l'écrire qu'une fois ; mais on l'affecte de l'indice ², et l'on écrit

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Sous cette forme, la dérivée seconde prend plus particulièrement le nom de *coefficient différentiel du second ordre*.

De même on peut représenter la dérivée troisième y''', ou la dérivée de y'', par

$$\frac{dy''}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{d.\frac{d^2y}{dx^2}}{dx},$$

et, puisque dx est regardé comme constant, on peut écrire

$$y''' = \frac{d\,d^2y}{dx^3}.$$

On n'écrit le signe d qu'une fois en l'affectant de l'indice ³, et l'on a

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3};$$

c'est le *coefficient différentiel du troisième ordre.*

En général, on représente d'une manière analogue la dérivée d'un ordre quelconque n ; et l'on écrit

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n};$$

c'est le *coefficient différentiel de l'ordre* n.

52. — Soit, par exemple, $y=x^m$, on en tirera

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3};$$

et en général

$$\frac{d^ny}{dx^n} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

On peut remarquer que, pour $n=m$, on obtient

$$\frac{d^my}{dx^m} = m(m-1)\ldots 3.2.1,$$

quantité constante; en sorte que la dérivée de l'ordre $m+1$ est nulle, et qu'il en est de même de toutes les suivantes.

On en conclut qu'une fonction algébrique entière du degré m n'a pas plus de m dérivées successives; la dérivée de l'ordre m est constante, et toutes les suivantes sont nulles.

Mais, pour toutes les autres fonctions, le nombre des dérivées successives est indéfini. Si, par exemple, on a $y=e^x$, on en déduira

$$\frac{dy}{dx}=e^x;\quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^x;\quad \frac{d^3y}{dx^3}=e^x;$$

et ainsi de suite; toutes les dérivées sont égales entre elles et à la fonction e^x.

Si l'on a $y=\sin x$, on en déduit

$$\frac{dy}{dx}=\cos x;\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\cos x;\quad \frac{d^4y}{d^4x}=+\sin x,\ \ldots;$$

les dérivées se reproduisent périodiquement dans l'ordre

$$+\cos x,\ -\sin x,\ -\cos x,\ +\sin x.$$

On verrait de même que les dérivées de e^{-x} ont toutes pour valeur absolue e^{-x}, mais qu'elles sont alternativement affectées du signe — et du signe +, et que les dérivées successives de $\cos x$ se reproduisent périodiquement dans l'ordre

$$-\sin x,\ -\cos x,\ +\sin x,\ +\cos x.$$

53. — La notation des différentielles successives se déduit de celle des dérivées.

Les différentielles successives de y sont:

$$dy,\ d.dy\ \text{ ou }\ d^2y,\ d.d^2y\ \text{ ou }\ d^3y,$$

et ainsi de suite.

Si maintenant on se rappelle que la différentielle d'une fonc-

tion de x est égale à sa dérivée multipliée par dx, et que le facteur dx doit être considéré comme constant, on aura

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{dy}{dx}\,dx,$$

$$d^2y = f''(x)\,dx\,dx = \frac{d^2y}{dx^2}\,dx^2,$$

$$d^3y = f'''(x)\,dx^2.dx = \frac{d^3y}{dx^3}\,dx^3,$$

et ainsi de suite, relations qu'il ne faut pas confondre avec des identités, attendu que

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \ldots,$$

sont des notations spéciales et non des quotients.

On a, en général,

$$d^n y = \frac{d^n y}{dx^n}\,dx^n,$$

et l'on voit que la différentielle de l'ordre n est un infiniment petit du même ordre, puisque le facteur $\frac{d^n y}{dx^n}$, qui représente une dérivée, est généralement fini.

§ 2. — DIFFÉRENTIELLES SUCCESSIVES DES FONCTIONS EXPLICITES DE PLUSIEURS VARIABLES

54. — Soit $f(u, v)$ une fonction de deux variables indépendantes. On a vu que sa *dérivée partielle* (26) par rapport à u est représentée par $\frac{df}{du}$. Cette dérivée étant, en général, elle-même une fonction de u et de v, on peut en prendre la dérivée partielle par rapport à u; et, conformément à la notation adoptée pour les fonction d'une variable (51), on la re-

présentera par $\frac{d^2f}{du^2}$. Cette dérivée seconde étant une fonction de u et de v, on pourra en prendre la dérivée partielle par rapport à u, et l'on aura la dérivée troisième $\frac{d^3f}{du^3}$; et ainsi de suite.

On verrait de la même manière que les dérivées partielles des divers ordres prises par rapport à v sont représentées par $\frac{df}{dv}$, $\frac{d^2f}{dv^2}$, $\frac{d^3f}{dv^3}$, ...

Mais, après avoir pris la dérivée partielle par rapport à u, $\frac{df}{du}$, comme cette dérivée est une fonction de u et de v, on peut en prendre la dérivée par rapport à v ; on la représente, par analogie, par $\frac{d^2f}{du\,dv}$.

On pourrait, au contraire, après avoir pris la dérivée de $f(u, v)$ par rapport à v, $\frac{df}{dv}$, prendre la dérivée partielle de celle-ci par rapport à u ; on la représente par $\frac{d^2f}{dv\,du}$.

Plus généralement, on peut, après avoir pris p dérivées partielles successives de $f(u, v)$ par rapport à u, prendre ensuite q dérivées partielles successives de la dernière par rapport à v.

Le résultat final de ce calcul est une dérivée de l'ordre $p+q$, que l'on représente par

$$\frac{d^n f}{du^p\,dv^q},$$

en remplaçant, pour abréger, $p+q$ par n.

Si, par exemple, on a pris deux dérivées partielles successives par rapport à u, puis trois dérivées partielles successives par rapport à v, le résultat final sera représenté par

$$\frac{d^5 f}{du^2\,dv^3}.$$

33. — Dans ce genre de calcul, *l'ordre des différentiations est indifférent*.

On fait voir aisément, par exemple, qu'on a

$$\frac{d^2f}{du\,dv}=\frac{d^2f}{dv\,du}.$$

En effet, on a vu au n° 12, que si l'on a $y=f(x)$, on en tire

$$dy=f(x+dx)-f(x),$$

d'où

(1) $$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}.$$

Si donc on a $z=f(u,v)$, et que l'on considère d'abord le second membre comme fonction de u, c'est-à-dire v comme constant, on aura

(2) $$\frac{dz}{du}=\frac{f(u+du,v)-f(u,v)}{du}.$$

Si l'on veut obtenir la dérivée de cette expression par rapport à v, il faudra, d'après la règle exprimée par la relation (1) elle-même, changer, dans le second membre de (2), la variable v en $v+dv$, retrancher du résultat la valeur primitive de ce second membre, et diviser la différence par dv, ce qui donnera (3)

$$\frac{d^2z}{du\,dv}=\frac{f(u+du,v+dv)-f(u,v+dv)-f(u+du,v)+f(u,v)}{du\,dv}.$$

Supposons maintenant que l'on fasse le calcul dans un ordre inverse. En ne faisant varier d'abord que v, on aura

$$\frac{dz}{dv}=\frac{f(u,v+dv)-f(u,v)}{dv}.$$

Pour obtenir la dérivée de cette expression par rapport à u, il faut, conformément à la règle exprimée par la relation (1).

changer, dans le second membre, la variable u en $u+du$, retrancher du résultat la valeur primitive de ce second membre, et diviser la différence par du, ce qui donne (4)

$$\frac{d^2z}{dv\,du}=\frac{f(u+du,v+dv)-f(u+du,v)-f(u,v+dv)+f(u,v)}{dv\,du}.$$

Or, si l'on compare les seconds membres des relations (3) et (4), on reconnaît qu'ils ne diffèrent que par l'ordre des termes du numérateur, ou par l'ordre des facteurs du dénominateur; ils sont donc égaux, et l'on a

$$\frac{d^2z}{du\,dv}=\frac{d^2z}{dv\,du}.$$

Ce théorème étant applicable aussi bien à une dérivée qu'à la fonction $f(u,v)$ elle-même, il en résulte qu'on pourra toujours intervertir l'ordre de deux différentiations consécutives quelconques, et amener par conséquent les différentiations à se succéder dans un ordre quelconque; ce qu'il s'agissait d'établir.

58. Cela posé, on a trouvé au nº 27 que la relation

$$z=f(u,v)$$

donne

$$dz=\frac{df}{du}du+\frac{df}{dv}dv, \tag{5}$$

dz désignant la différentielle totale de $f(u,v)$.

Si l'on différentie les deux membres en faisant tout varier, l'application des règles relatives à la différentiation d'une somme et d'un produit donnera

$$d^2z=d.\left(\frac{df}{du}\right)du+\frac{df}{du}d^2u+d.\left(\frac{df}{dv}\right)dv+\frac{df}{dv}d^2v. \tag{6}$$

Mais si l'on applique aux fonctions $\frac{df}{du}$ et $\frac{df}{dv}$ la règle exprimée

par la relation (5), on obtient

$$d.\left(\frac{df}{du}\right)=\frac{d^2f}{du^2}du+\frac{d^2f}{dudv}.dv$$

et

$$d.\left(\frac{df}{dv}\right)=\frac{d^2f}{dvdu}du+\frac{d^2f}{dv^2}dv.$$

Substituant ces valeurs dans la relation (6), et remarquant que $\frac{d^2f}{du\,dv}=\frac{d^2f}{dv\,du}$, on trouve

$$(7)\quad d^2z=\frac{d^2f}{du^2}du^2+2\frac{d^2f}{du\,dv}dudv+\frac{d^2f}{dv^2}dv^2+\frac{df}{du}d^2u+\frac{df}{dv}d^2v.$$

57. — Pour obtenir d^3z, il faudrait différentier la relation (7) en faisant tout varier; la différentiation introduirait: 1° les quantités $d.\left(\frac{d^2f}{du^2}\right)$, $d.\left(\frac{d^2f}{du\,dv}\right)$, $d.\left(\frac{d^2f}{dv^2}\right)$, dont on obtiendrait la valeur en appliquant à ces fonctions la règle exprimée par l'équation (5), et 2° les quantités $d\left(\frac{df}{du}\right)$ et $d\left(\frac{df}{dv}\right)$ déjà obtenues plus haut; en faisant les substitutions, et tenant compte du théorème du n° 55, on arriverait à la valeur de d^3z. On suivrait une marche analogue pour obtenir d^4z et les différentielles suivantes. Mais le calcul va toujours en se compliquant, et, au delà de d^2z, les résultats ne sont pas utiles dans les applications ordinaires.

Remarques. — I. Dans le cas particulier où u et v sont remplacés par x et par y, et où l'on a

$$z=f(x,y),$$

on pose souvent

$$\frac{df}{dx}=p,\quad \frac{df}{dy}=q,\quad \frac{d^2f}{dx^2}=r,\quad \frac{d^2f}{dx\,dy}=s,\quad \frac{d^2f}{dy^2}=t.$$

Les équations (5) et (7) deviennent alors

$$(8)\quad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy \\ d^2 z = r dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + pd^2 x + qd^2 y. \end{cases}$$

Ces notations sont adoptées par beaucoup d'auteurs.

II. Si les variables x et y, au lieu d'être indépendantes, étaient fonctions d'une même variable indépendante α, la variable z serait aussi fonction de α, et l'on aurait

$$dx = \frac{dx}{d\alpha}\,d\alpha,\quad dy = \frac{dy}{d\alpha}\,d\alpha,\quad d^2 x = \frac{d^2x}{d\alpha^2}\,d\alpha^2,\quad d^2 y = \frac{d^2y}{d\alpha^2}\,d\alpha^2,$$

$$dz = \frac{d^2z}{d\alpha^2}\,d\alpha^2.$$

En substituant ces valeurs dans la relation (8) et divisant par $d\alpha^2$, on trouve

$$(9)\quad \frac{d^2z}{d\alpha^2} = r\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + 2s\frac{dx}{d\alpha}\cdot\frac{dy}{d\alpha} + t\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 + p\frac{d^2x}{d\alpha^2} + q\frac{d^2y}{d\alpha^2}.$$

§ 3. — DIFFÉRENTIELLES SUCCESSIVES DES FONCTIONS COMPOSÉES

58. — Si, dans la fonction $f(u, v)$, les variables u et v, au lieu d'être indépendantes, sont fonctions d'une même variable x, la relation (7) du n° 56 n'en a pas moins lieu. Mais on a alors

$$du = u'dx,\quad d^2 u = u''dx^2,\quad dv = v'dx,\quad d^2 v = v''dx^2,$$

u', u'', v', v'' désignant les deux premières dérivées de u et de v par rapport à x. Substituant ces valeurs et divisant par dx^2, on obtient

$$(10)\quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2f}{du^2}u'^2 + 2\frac{d^2f}{du\,dv}u'v' + \frac{d^2f}{dv^2}v'^2 + \frac{df}{du}u'' + \frac{df}{dv}v''.$$

§ 4. — DIFFÉRENTIELLES SUCCESSIVES DES FONCTIONS IMPLICITES

59. — Soit $f(x, y) = 0$, la relation qui lie deux variables x et y, la première étant la variable indépendante.

Posons d'abord

$$z = f(x, y),$$

nous en déduirons, en vertu de l'équation (10) du n° 58,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2}x'^2 + 2\frac{d^2f}{dxdy}x'y' + \frac{d^2f}{dy^2}y'^2 + \frac{df}{dx}x'' + \frac{df}{dy}\cdot y''.$$

Mais puisque la fonction $f(x, y)$ est constamment nulle, il en est de même de ses dérivées successives (19. Rem.); on a donc $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$. En même temps, x devenant la variable indépendante, on a $x' = 1$ et $x'' = 0$; l'équation ci-dessus devient donc

$$(11) \qquad \frac{d^2f}{dx^2} + 2y'^2\frac{d^2f}{dx\,dy} + y'^2\frac{d^2f}{dy^2} + y''\frac{df}{dy} = 0.$$

Il faut remarquer que cette relation peut se déduire de la relation

$$(12) \qquad \frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} = 0,$$

établie au n° 30. Il suffit pour cela de différentier le premier membre en faisant tout varier, et en regardant y' comme une fonction de x, et d'égaler à zéro la dérivée ainsi obtenue.

Si l'on opère de même sur la relation (11), c'est-à-dire si l'on différentie le premier membre en faisant tout varier, et en regardant y' et y'' comme des fonctions de x, puis qu'on égale à zéro la dérivée obtenue, on trouve

$$(11) \qquad \left(\frac{d^3f}{dx^3} + 3y'\frac{d^3f}{dx^2dy} + 3y'^2\frac{d^3f}{dx\,dy^2} + y'^3\frac{d^3f}{dy^3}\right)$$
$$+ 3\left(\frac{d^2f}{dx\,dy} + y'\frac{d^2f}{dy^2}\right)y'' + y'''\frac{df}{dy} = 0,$$

équation qu'on pourrait obtenir aussi, mais moins simplement, en suivant la marche indiquée au n° 57, changeant u et v en x et en y et remarquant que puisque x devient variable indépendante, on a

$$x' = 1, \ x'' = 0, \ x''' = 0.$$

On voit que la première dérivée est donnée par la relation (12) ; cette dérivée étant connue, on substituera sa valeur dans la relation (11), qui donnera y''; les dérivées y' et y'' étant connues, on substituera leurs valeurs dans la relation (13), qui donnera y'''.

Les dérivées suivantes ne se rencontrent pas dans les applications ; mais elles s'obtiendraient par des calculs analogues. Pour obtenir y^{iv}, par exemple, il faudrait égaler à zéro la dérivée du premier membre de l'équation (11) prise en faisant tout varier et en regardant y', y'' et y''' comme des fonctions de x.

V. — DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES

§ I. — FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE

60. — Étant donnée une fonction de x, que nous représenterons par $f(x)$, on donne à la variable x un accroissement h, et l'on se propose de développer $f(x+h)$ en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de h ; en d'autres termes, on se propose de trouver une série de ce genre qui puisse remplacer la fonction $f(x+h)$. Il faut pour cela que la série obtenue soit *convergente* (voy. l'*Appendice*), et qu'en prenant un nombre suffisant de termes, on puisse, quelque soit x, approcher autant qu'on le voudra de la valeur de $f(x+h)$.

61. — Si la fonction proposée est algébrique et entière par rapport à x, le développement demandé est facile à obtenir.

Il suffit de se rappeler que, dans le développement d'une puissance entière du binôme $x+h$, chaque terme se forme du précédent en multipliant par l'exposant de x dans ce terme, en diminuant d'une unité l'exposant de x, en augmentant d'une unité l'exposant de h, et en divisant enfin par le nombre des termes qui précèdent celui que l'on veut former. Ceci revient à dire que, dans le développement, le coefficient de chaque puissance de h est égal à la dérivée par rapport à x du coefficient précédent, divisée par le nombre des termes qui précèdent celui que l'on considère. Ainsi le terme général du développement de $(x+h)^m$, savoir :

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}.x^{m-n}.h^n$$

donnerait d'après cette règle

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)}{1.2.3\ldots n(n+1)}.x^{m-n-1}.h^{n+1};$$

ce qui est bien le terme suivant du développement.

La même règle subsisterait évidemment si la puissance de $x+h$ que l'on développe était multipliée par un facteur constant ; car ce facteur affecterait tous les termes du développement sans altérer la loi suivant laquelle se forment les coefficients successifs des puissances de h.

62. — Cela posé, soit

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2}\ldots + Tx + U,$$

changeons x en $x+h$, il viendra

$$f(x+h) = A(x+h)^m + B(x+h)^{m-1} + C(x+h)^{m-2}\ldots$$
$$+ T(x+h) + U$$

ou, en développant et ordonnant par rapport à h,

$$
\begin{array}{ll|l|l|l}
f(x+h) = & Ax^m + \frac{m}{1}Ax^{m-1} & h + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}Ax^{m-2} & h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}Ax^{m-3} & h^3 + \ldots \\
 & + Bx^{m-1} + \frac{m-1}{1}Bx^{m-2} & + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\ 2}Bx^{m-3} & + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3}Bx^{m-4} & \ldots\ldots \\
 & + Cx^{m-2} + \frac{m-2}{2}Cx^{m-3} & + \frac{(m-2)(m-3)}{1.\ 2}Cx^{m-4} & + \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\ 2.\ 3}Cx^{m-5} & \ldots\ldots \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
 & + Tx \quad + \quad T & & & \\
 & + U & & &
\end{array}
$$

Or, les termes qui forment la première colonne verticale reproduisent la fonction proposée $f(x)$. D'après la remarque aite plus haut, chacun des termes qui forment le coefficient de h est la dérivée par rapport à x du terme qui lui correspond dans la colonne précédente, divisée par 1 ; l'ensemble de ces termes est donc la dérivée de $f(x)$ par rapport à x, divisée par 1, et peut conséquemment s'écrire $\frac{f'(x)}{1}$. Chacun des termes qui forment le coefficient de h^2 est la dérivée par rapport à x du terme qui lui correspond dans la colonne précédente, divisée par 2 ; l'ensemble de ces termes est donc la dérivée de $\frac{f'(x)}{1}$ divisée par 2, et peut s'écrire $\frac{f''(x)}{1.2}$. On verrait de même que l'ensemble des termes qui forment le coefficient de h^3 est la dérivée par rapport à x de $\frac{f''(x)}{1.2}$, divisée par 3 ; et peut s'écrire $\frac{f'''(x)}{1.2.3}$. Et ainsi de suite ; on a donc

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1}h+\frac{f''(x)}{1.2}h^2+\frac{f'''(x)}{1.2.3}h^3+\ldots,$$

Ce développement n'a qu'un nombre limité de termes, parce que la dérivée d'ordre m est constante et que toutes les suivantes sont nulles. Le nombre des termes du développement est donc $m+1$; on l'écrit ordinairement

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{1.2}+f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots,$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule de Taylor*.

Si, par exemple, on a

$$f(x)=x^4-3x^3+5x^2-7x+4,$$

on trouvera successivement

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 4x^3 - 9x^2 + 10x - 7,\\
f''(x) &= 12x^2 - 18x + 10,\\
f'''(x) &= 24x - 18,\\
f^{\text{IV}}(x) &= 24,
\end{aligned}
$$

et par suite

$$
f(x+h) = \begin{array}{l|l|l|l}
x^4 + 4x^3 & \frac{h}{1} + 12x^2 & \frac{h^2}{1.2} + 24x & \frac{h^3}{1.2.3} + 24\frac{h^4}{1.2.3.4} \\
-3x^3 - 9x^2 & -18x & -18 & \\
+5x^2 + 10x & +10 & & \\
-7x - 7 & & & \\
+4 & & &
\end{array}
$$

ou

$$
f(x+h) = \begin{array}{l|l|l|l}
x^4 + 4x^3 & h + 6x^2 & h^2 + 4x & h^3 + h^4. \\
-3x^3 - 9x^2 & -9x & -3 & \\
+5x^2 + 10x & +5 & & \\
-7x - 7 & & & \\
+4\ . & & &
\end{array}
$$

63. — Il était naturel de rechercher si les fonctions autres que les fonctions algébriques entières peuvent être développées d'une manière analogue. On démontre de plusieurs manières que la série de Taylor subsiste toutes les fois que la fonction $f(x)$ et toutes ses dérivées conservent une valeur finie entre les limites répondant à x et à $x+h$, h étant d'ailleurs une quantité très-petite. Nous adopterons la démonstration suivante, qui est, à quelques détails près, celle de Lagrange.

Il faut d'abord établir le *lemme* suivant :

Toute fonction $\varphi(h)$ *qui s'annule avec la variable* h, *est de même signe que sa dérivée pour des valeurs de* h *suffisamment petites*. En effet, lorsque h croît à partir de zéro, la valeur absolue de $\varphi(h)$ est nécessairement croissante, et

$\varphi(h+\Delta h)$ est de même signe que $\varphi(h)$ pour h suffisamment petit. Or on a (13)

$$(1) \qquad \varphi'(h) = \lim . \frac{\varphi(h+\Delta h) - \varphi(h)}{\Delta h}.$$

Si $\varphi(h+\Delta h)$ et $\varphi(h)$ sont tous deux positifs, la différence $\varphi(h+\Delta h) - \varphi(h)$ est positive; et, comme Δh est positif, le second membre de la relation (1) est positif; il en est de même à la limite, c'est-à-dire pour Δh infiniment petit; donc $\varphi'(h)$ est positif, c'est-à-dire de même signe que $\varphi(h)$.

Si $\varphi(h+\Delta h)$ et $\varphi(h)$ sont tous deux négatifs, la différence $\varphi(h+\Delta h) - \varphi(h)$ est négative; donc $\varphi'(h)$ est négatif, c'est-à-dire encore de même signe que $\varphi(h)$.

64. — Cela posé, considérons une fonction $f(x)$, finie et continue, dont toutes les dérivées restent finies depuis la valeur x de la variable jusqu'à la valeur $x+h$ peu différente. On pourra toujours écrire

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} f(x+h) = f(x) + f'(x)\dfrac{h}{1} + f''(x)\dfrac{h^2}{1.2} \\ \quad + f'''(x)\dfrac{h^3}{1.2.3} + \ldots + f^{(n-1)}(x)\dfrac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + R_n. \end{array} \right.$$

la lettre R_n désignant une quantité définie par la relation (2) elle-même, et à laquelle on donne le nom de *reste*. Il s'agit de faire voir que, dans les conditions indiquées ci-dessus, ce reste peut être rendu aussi petit qu'on le voudra en prenant un nombre de termes suffisamment grand.

Ce reste est une fonction de x et de h qu'on peut toujours mettre sous la forme

$$(3) \qquad R_n = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} F(x, h).$$

Pour des valeurs déterminées de x et de h, R_n a lui-même une valeur déterminée, et d'ailleurs finie comme le montre sa va-

leur tirée de (2). Nous la supposerons d'abord positive pour fixer les idées.

Soient A et B deux nombres comprenant entre eux $F(x, h)$. Si dans la relation (2) on met à la place de $F(x, h)$ un nombre plus petit A, l'égalité (2) se changera en inégalité ; et, en passant tous les termes dans le premier membre, on aura

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & f(x+h) - \left[f(x) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1.2} \right. \\ & \left. \quad + f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots + A\frac{h^n}{1.2.3\ldots n} \right] > 0. \end{aligned} \right.$$

Le premier membre de cette inégalité est une fonction de h qui s'annule avec h ; en vertu du *lemme* démontré plus haut, il est donc de même signe que sa dérivée par rapport à h ; et l'on a

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} & f'(x+h) - \left[f'(x) + f''(x)\frac{h}{1} + f'''(x)\frac{h^2}{1.2} + \ldots \right. \\ & \left. \quad + A\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \right] > 0. \end{aligned} \right.$$

Le premier membre de cette inégalité est encore une fonction de h qui s'annule avec h ; il est donc de même signe que sa dérivée par rapport à h ; et l'on a

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} & f''(x+h) - \left[f''(x) + f'''(x)\frac{h}{1} + \ldots \right. \\ & \left. \quad + A\frac{h-2}{1.2.3\ldots(n-2)} \right] > 0. \end{aligned} \right.$$

En continuant ainsi, on arrive, après n différentiations, à l'inégalité

$$(7)\qquad f^n(x+h) - A > 0.$$

Supposons maintenant que dans la relation (2) on rem-

place $F(x, h)$ par le nombre plus grand B, on aura l'inégalité

$$(8)\left\{\begin{aligned} & f(x+h)-\left[f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{1.2}\right. \\ & \left. \quad +f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots+B\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\right]<0. \end{aligned}\right.$$

En raisonnant et opérant sur cette inégalité comme sur l'inégalité (4), on verra qu'après n différentiations par rapport à h, on arrive à l'inégalité

$$(9) \qquad f^n(x+h)-B<0.$$

Il résulte des relations (7) et (9) que $f^n(x+h)$ est compris entre A et B, résultat qui subsistera encore si l'on prend pour A et B la plus petite et la plus grande valeur que puisse prendre $f^n(x+h)$ quand h varie de 0 à h.

Mais si les relations (7) et (9) sont satisfaites, on voit aisément qu'en vertu du lemme invoqué toutes les inégalités précédentes sont également satisfaites, et qu'on a en particulier les inégalités (4) et (8), ce qui suppose que A et B comprennent entre eux $F(x, h)$. La fonction $F(x, h)$ est donc comprise entre la plus petite et la plus grande valeur de $f^n(x+h)$; elle est par conséquent égale à l'une de ses valeurs intermédiaires, et l'on peut poser

$$(10) \qquad F(x, h)=f^n(x+\theta h),$$

θ désignant un multiplicateur inconnu, mais compris entre 0 et 1.

Nous avons supposé R_n positif: s'il était négatif, les raisonnements demeureraient les mêmes, il n'y aurait de changé que le sens des inégalités ci-dessus écrites; on parviendrait donc encore à la relation (10). Il en résulte qu'on peut écrire

$$(11)\left\{\begin{aligned} & f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{1.2} \\ & +f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots+f^n(x+\theta h)\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}. \end{aligned}\right.$$

Cette formule peut encore s'écrire :

$$(11\ bis)\quad \begin{cases} f(x+h) = f(x) + \dfrac{df}{dx}\cdot\dfrac{h}{1} + \dfrac{d^2f}{dx^2}\cdot\dfrac{h^2}{1.2} \\ \qquad + \dfrac{d^3f}{dx^3}\cdot\dfrac{h^3}{1.2.3} + \dots \end{cases}$$

65. — REMARQUE. Cette formule donne la valeur de l'accroissement Δy d'une fonction correspondant à l'accroissement Δx de la variable. Il suffit d'y remplacer h par Δx, et de remarquer que $f(x+h) - f(x)$ devient alors

$$f(x+\Delta x) - f(x) \quad \text{ou} \quad \Delta y.$$

On a donc

$$\Delta y = \frac{df}{dx}\Delta x + \frac{d^2f}{dx^2}\cdot\frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3f}{dx^3}\cdot\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \dots$$

Si Δx devient infiniment petit, il en est de même de Δy, et l'on peut écrire

$$dy = \frac{df}{dx}dx + \frac{d^2f}{dx^2}\cdot\frac{dx^2}{1.2} + \frac{d^3f}{dx^3}\cdot\frac{dx^3}{1.2.3} + \dots,$$

Ce n'est donc qu'en négligeant les infiniment petits du second ordre qu'on peut écrire

$$dy = \frac{df}{dx}dx, \quad \text{ou} \quad dy = \frac{dy}{dx}dx.$$

Cette dernière relation n'est donc une identité qu'en apparence.

66. — REMARQUES. 1. Si, comme on l'a supposé, $f(x)$ et toutes ses dérivées conservent une valeur finie de la valeur x à la valeur $x+h$, le reste R_n tend vers zéro à mesure qu'on prend un plus grand nombre de termes. Cela est évident pour $h < 1$, puisque h^n peut devenir plus petit que toute quantité donnée en prenant n suffisamment grand. Mais cela

est vrai encore pour h quelconque. Car soient p et $p+1$ deux nombres entiers comprenant h, la fraction

$$\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}$$

pourra s'écrire

$$\frac{h^p}{1.2.3\ldots p}\cdot\frac{h}{p+1}\cdot\frac{h}{p+2}\cdot\frac{h}{p+3}\cdots\frac{h}{n}.$$

Or

$$\frac{h}{p+1}\cdot\frac{h}{p+2}\cdot\frac{h}{p+3}\cdots\times\frac{h}{n}$$

est moindre que

$$\left(\frac{1}{p+1}\right)^{n-p};$$

et comme $p+1$ est plus grand que h, la puissance $n-p$ de la fraction $\frac{h}{p+1}$ peut être rendue aussi petite qu'on voudra en prenant n suffisamment grand. Le reste R_n renferme donc un facteur qui tend vers zéro; donc il tend lui-même vers zéro, puisque par hypothèse, les autres facteurs sont finis

II. Le *lemme* démontré au n° 63 est toujours vrai pour h très-petit; mais il peut subsister pour une valeur finie quelconque de h, si, de 0 à h, la dérivée $\varphi'(h)$ conserve son signe, et que $\varphi(h)$ continue à croître en valeur absolue; car ce sont les seules conditions nécessaires pour que la démonstration du lemme demeure applicable.

67. — En répétant les raisonnements du n° 64, on démontre qu'on a

$$(12)\quad \begin{cases} f(x-h)=f(x)-f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{1.2} \\ \quad -f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots,\pm f^n(x-\theta h)\ \frac{h}{1.2.3\ldots n},\end{cases}$$

formule qui ne diffère de la formule (11) qu'en ce que h a été changé partout en $-h$.

Les formules (11) et (12) constituent la *série de Taylor*. Elles sont applicables à toutes les fonctions dont les dérivées successives, ainsi que la fonction elle-même, conservent une valeur finie entre les limites $x-h$ et $x+h$.

68. — Le reste R_n de la série de Taylor est susceptible de plusieurs autres formes ; nous ferons connaître la suivante dont on a quelquefois besoin.

L'accroissement h donné à x étant arbitraire, on peut le choisir de manière que $x+h$ soit égal à une constante c, et qu'on ait $x+h=c$, d'où $dx+dh=0$. Le reste R_n, qui est généralement fonction de x et de h, devient dans ce cas fonction de x et de $c-x$, c'est-à-dire qu'on peut le représenter par $\varphi(x)$. On a donc

$$(1)\qquad f(x+h)=f(c)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{1.2}$$
$$+f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots+f^{n-1}(x)\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+\varphi(x).$$

Différentions en faisant varier x et h ; les termes se réduiront deux à deux en vertu de la relation $dx+dh=0$, et il restera

$$0=f^n(x)\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}+\varphi'(x)$$

d'où

$$(2)\qquad \varphi'(x)=-f^n(x)\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Mais on a, par la formule de Taylor, bornée au premier terme,

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+\varphi'(x+\theta h)\,h$$

d'où

$$\varphi(x)=\varphi(c)-h\varphi'(x+\theta h).$$

Or, il résulte de la relation (1) que $\varphi(x)$ s'annule pour $h=0$, ou $x=c$; on a donc $\varphi(c)=0$, et il reste

$$\varphi(x)=-h\varphi'(x+\theta h). \tag{3}$$

Dans la relation (2), changeons x en $x+\theta h$; comme h égale $c-x$, h se changera en $c-x-\theta h$ ou en $h-\theta h$, ou enfin en $h(1-\theta)$, et il viendra

$$\varphi'(x+\theta h)=-f^n(x+\theta h)\frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

et, en substituant cette valeur dans la relation (3),

$$\varphi(x)=-f^n(x+\theta h)\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}. \tag{4}$$

Telle est la seconde forme qu'on peut donner au reste R_n dans le développement de $f(x+h)$.

S'il s'agissait du développement de $f(x-h)$, on trouverait de même

$$\varphi(x)=\pm f^n(x+\theta h)\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}. \tag{5}$$

69. — Dans la série (11) on peut remplacer x par h et h par x et écrire

$$f(h+x)=f(h)+f'(h)\frac{x}{1}+f''(h)\frac{x^2}{1.2}+f'''(h)\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$$
$$+f^n(h+\theta x)\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}.$$

Si alors on fait $h=0$, on obtient

$$(13)\left\{\begin{aligned}&f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1}+f''(0)\frac{x^2}{1.2}+f'''(0)\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc.}\\&\quad+f^n(\theta x)\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}.\end{aligned}\right.$$

Cette formule est connue sous le nom de *série de Maclaurin*.

Elle sert à développer une fonction de x suivant les puissances croissantes de cette variable. Elle suppose que les fonctions $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ..., $f^n(\theta x)$ soient des quantités finies. Nous en verrons bientôt les applications.

On peut donner au reste la forme (68)

$$f^n(\theta x)\,\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

§ 2. — DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

70. — La série de Taylor peut être étendue aux fonctions de deux variables.

Étant donnée une fonction de deux variables $f(x,y)$, on y change x en $x+h$, et y en $y+k$, et l'on demande de développer $f(x+h,y+k)$ en série ordonnée suivant les puissances croissantes de h et de k.

En considérant d'abord $f(x+h,y+k)$ comme une fonction de x, c'est-à-dire en regardant y comme constant, on pourra appliquer la série de Taylor (64, 11 *bis*), et écrire

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & f(x+h,y+k)=f(x,y+k)+\frac{df(x,y+k)}{dx}\cdot\frac{h}{1} \\ & +\frac{d^2f(x,y+k)}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3f(x,y+k)}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots, \end{aligned} \right.$$

Si maintenant on considère comme des fonctions de y seul les expressions

$$f(x,y+k),\ \frac{df(x,y+k)}{dx},\ \frac{d^2f(x,y+k)}{dx^2},\ \frac{d^3f(x,y+k)}{dx^3},\ \ldots,$$

on aura, en appliquant de nouveau la série de Taylor,

$$\begin{aligned} f(x,y+k)=f(x,y)+\frac{df(x,y)}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2f(x,y)}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} \\ +\frac{d^3f(x,y)}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\ldots, \end{aligned}$$

$$\frac{df(x,y+k)}{dx}=\frac{d\,f(x,y)}{dx}+\frac{d^2f(x,y)}{dx\,dy}\cdot\frac{k}{1}+\frac{d^3f(x,y)}{dx\,dy^2}\cdot\frac{k^2}{1.2}+\ldots,$$

$$\frac{d^2f(x,y+k)}{dx}=\frac{d^2f(x,y)}{dx^2}+\frac{d^3f(x,y)}{dx^2dy}\cdot\frac{k}{1}+\frac{d^4f(x,y)}{dx^2dy^2}\cdot\frac{k^2}{1.2}+\ldots,$$

$$\frac{d^3f(x,y+k)}{dx^3}=\frac{d^3f(x,y)}{dx^3}+\frac{d^4f(x,y)}{dx^3dy}\frac{k}{1}+\ldots,$$

. . . .

Substituant dans la relation (1), et ordonnant, on obtient

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k)=f(x,)y&+\frac{df}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2f}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3f}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\ldots,\\ &+\frac{df}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2f}{dydx}\frac{kh}{1}+\frac{d^3f}{dy^2dx}\frac{k^2h}{1.2}+\ldots,\\ &\qquad+\frac{d^2f}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3f}{dy\,dx^2}\frac{kh^2}{1.2}+\ldots,\\ &\qquad\qquad+\frac{d^3f}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots,\\ &\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ou, en réduisant, dans chaque colonne, au même dénominateur,

$$(2)\left\{\begin{aligned} f(x+h,y+k)&=f(x,y)+\frac{1}{1}\left(\frac{df}{dx}h+\frac{df}{dy}k\right)\\ &+\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2f}{dx^2}h^2+2\frac{d^2f}{dx\,dy}hk+\frac{d^2f}{dy^2}k^2\right) \end{aligned}\right.$$
$$+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d^3f}{dx^3}h^3+3\frac{d^3f}{dx^2dy}h^2k+3\frac{d^3f}{dx\,dy^2}.hk^2+\frac{d^3f}{dy^3}k^3\right)+\ldots,$$

Le terme général de ce développement est

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}$$

multiplié par

$$\left[\frac{d^nf}{dx^n}h^n+n\frac{d^{n-1}f}{dx^ndy}h^{n-1}k+\frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}dy^2}h^{n-2}k^2+\ldots+\frac{d^nf}{dy^n}k^n\right].$$

On peut l'écrire symboliquement :

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left\{\frac{df}{dx}h+\frac{df}{dy}k\right\}^n,$$

en entendant par cette notation qu'en développant la quantité entre parenthèses d'après la formule du binôme, les exposants qui devraient affecter df seront remplacés par l'indice n, de telle sorte qu'on aura d^nf dans chaque terme.

71. — On peut aussi étendre aux fonctions de deux variables la série de Maclaurin. Dans la relation (2), on changera d'abord x en h et h en x, puis y en k et k en y ; enfin l'on fera $h=0$ et $k=0$; on obtient ainsi :

$$(3)\left\{\begin{array}{l} f(x,y)=f(0,0)+\frac{1}{1}\left[\left(\frac{df}{dx}\right)_0 x+\left(\frac{df}{dy}\right)_0 y\right]+ \\ \frac{1}{1.2}\left[\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 x^2+2\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)_0 xy+\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)_0 y^2\right]+\ldots, \end{array}\right.$$

les expressions

$$f(0,0),\ \left(\frac{df}{dx}\right)_0,\ \left(\frac{df}{dy}\right)_0,\ \left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)_0,\ \left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)_0,\ \left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)_0,\ \ldots,$$

représentant ce que deviennent respectivement les quantités

$$f(x,y),\ \frac{df}{dx},\ \frac{df}{dy},\ \frac{d^2f}{dx^2},\ \frac{d^2f}{dx\,dy},\ \frac{d^2f}{dy^2},\ \ldots,$$

quand on y fait à la fois $x=0$ et $y=0$.

72. — Il est entendu que la série de Taylor ne peut être étendue ainsi aux fonctions de deux variables qu'à la condition que la fonction proposée et toutes ses dérivées partielles restent finies dans les limites entre lesquelles on fait varier x et y.

La série de Maclaurin, étant un corollaire de celle de Taylor, est soumise aux mêmes restrictions.

VI. — APPLICATIONS ANALYTIQUES

§ I. — EXEMPLES DE DÉVELOPPEMENTS DE FONCTIONS EN SÉRIES

73. — *Développement de* e^x *et de* e^{-x}. Les dérivées successives de e^x sont toutes égales à e^x (52) ; et, pour $x=0$, elles se réduisent toutes à l'unité. En appliquant la formule de Maclaurin (69), on a donc

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots + \frac{x^n}{1.2.3\dots n} e^{\theta x}.$$

On a vu (65) que

$$\frac{x^n}{1.2.3\dots n}$$

tend vers zéro à mesure que n augmente ; d'ailleurs, $e^{\theta x}$ reste fini ; donc, le reste tend vers zéro, et la série peut toujours être employée.

74. — Si l'on a à développer e^{-x}, on remarquera que les dérivées successives de cette fonction sont alternativement $-e^{-x}$ et $+e^{-x}$ (52) ; et, pour $x=0$, elles se réduisent alternativement à -1 et à $+1$. D'ailleurs, la fonction proposée se réduit elle-même à $+1$; on a donc dans ce cas

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \dots \pm \frac{x^n}{1.2.3\dots n} e^{-\theta x},$$

et l'on verrait comme ci-dessus que le reste tend vers zéro.

75. — *Développement de* $\sin x$ *et de* $\cos x$. Les dérivées successives de $\sin x$ se reproduisent périodiquement dans l'ordre (52).

$$+\cos x, \; -\sin x, \; -\cos x, \; +\sin x, \; \dots,$$

et, pour $x=0$, elles prennent périodiquement les valeurs

$$+1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \text{etc.}$$

D'ailleurs, la fonction proposée elle-même se réduit à zéro. En appliquant la formule de Maclaurin, on trouve donc

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ \ldots\ + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^n(\theta x).$$

Or $\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$ tend vers zéro, et $f^n(\theta x)$ a pour valeur absolue $\cos \theta x$, n étant supposé impair ; le reste tend donc vers zéro.

76. — Si l'on a à développer $\cos x$, on remarque que ses dérivées successives se reproduisent périodiquement dans l'ordre (52)

$$-\sin x,\ -\cos x,\ +\sin x,\ +\cos x,\ \ldots,$$

ce qui donne périodiquement pour $x=0$

$$0,\ -1,\ 0,\ +1,\ \ldots.$$

D'ailleurs, la fonction proposée se réduit elle-même à $+1$. On a donc dans ce cas

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ \ldots\ \pm \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \cos \theta x,$$

si l'on suppose n pair. Le reste tend donc encore vers zéro.

77. — *Développement de* $\log'(1+x)$ *et de* $\log'(1-x)$.

Soit d'abord

$$f(x) = \log'(1+x),$$

on trouvera successivement

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1},$$
$$f''(x) = -1.(1+x)^{-2},$$
$$f'''(x) = +1.2(1+3)^{-3},$$
$$f^{\text{iv}}(x) = -1.2.3(1+x)^{-4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^n(x) = \pm 1.2.3\ldots(n-1)(1+x)^{-n};$$

et, pour $x=0$,

$$\begin{aligned}
f\ (0)&=\log' 1=0,\\
f'\ (0)&=+1,\\
f''\ (0)&=-1,\\
f'''\ (0)&=+1.2,\\
f^{\text{IV}}\ (0)&=-1.2.3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

La formule de Maclaurin donnera donc

$$\log'(1+x)=0+\frac{1}{1}x-\frac{1}{1.2}x^2+\frac{1.2}{1.2.3}x^3-\frac{1.2.3}{1.2.3.4}x^4+\ldots$$
$$\pm\frac{1.2.3\ldots(n-1)x^n}{1.2.3\ldots(n-1)n}(1+\theta x)^{-n}$$

ou

$$(1)\ \log'(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ \ldots\ \pm\frac{x^n}{n}(1+\theta x)^{-n}.$$

Or, le reste peut s'écrire

$$\pm\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$$

et l'on voit qu'il tendra vers zéro si $\frac{x}{1+\theta x}$ est égal à l'unité ou plus petit que l'unité, ce qui exige que x soit égal ou inférieur à l'unité.

78. — Soit maintenant

$$f(x)=\log'(1-x);$$

on trouvera

$$\begin{aligned}
f'\ (x)&=-(1-x)^{-1},\\
f''\ (x)&=-1.(1-x)^{-2},\\
f'''\ (x)&=-1.2\,(1-x)^{-3},\\
f^{\text{IV}}\ (x)&=-1.2.3\,(1-x)^{-4};
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. Et pour $x=0$,

$$\begin{aligned} f\ (0)&=0,\\ f'\ (0)&=-1,\\ f''\ (0)&=-1,\\ f'''\ (0)&=-1.2,\\ f^{\text{iv}}\ (0)&=-1.2.3,\\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On aura donc dans ce cas, en employant la seconde forme du reste (68),

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \log'(1-x)=-\frac{x}{1}- \quad -\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\dots\\ -\frac{x^n}{n-1}(1-\theta x)^{-n}.(1-\theta)^n. \end{aligned} \right.$$

Le reste peut s'écrire

$$\frac{x^n}{n-1}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right)^n.$$

La quantité entre crochets étant plus petite que l'unité, puisque x est supposé moindre que 1, et x^n pouvant devenir aussi petit que l'on voudra, on voit que le reste tend vers zéro à mesure que n augmente.

70. — On déduit des deux formules précédentes (1) et (2) la formule qui sert à calculer les logarithmes. Si l'on suppose $x<1$, on peut les appliquer toutes deux, sans tenir compte des restes ; et, en retranchant ces formules membre à membre, on obtient

$$\log'\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left[\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots\right].$$

On pose alors

$$x=\frac{1}{2n+1},$$

d'où

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n},$$

et l'on a

$$(3)\ \log'\left(\frac{n+1}{n}\right)=2\left[\frac{1}{1(2n+1)}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\dots\right]$$

Or, le premier membre revient à $\log'(n-1)-\log' n$; c'est donc la *différence tabulaire* entre les logarithmes des nombres consécutifs n et $n+1$.

Cela posé, on fera d'abord $n=1$ dans la formule (3), qui donnera ainsi $\log' 2$. On fera ensuite $n=2$ dans la même formule, qui donnera la différence entre $\log' 3$ et $\log' 2$, et par suite $\log' 3$. En faisant successivement $n=3$, $n=4$, $n=5$, ..., on obtiendra de même les logarithmes des nombres 4, 5, 6, ...; et l'on pourra construire ainsi une table des logarithmes népériens. Mais il est clair qu'on n'emploie la formule (3) que pour les logarithmes des nombres premiers ; les logarithmes des autres nombres s'obtiennent en faisant la somme des logarithmes de leurs facteurs.

La formule (3) est très-convergente. Les huit premiers termes donnent $\log' 2$, à moins d'un cent-millième. Quand on a atteint le nombre 1000, le premier terme de la série devient suffisant.

Ayant construit une table des logarithmes népériens, il suffit de les multiplier tous par une même quantité pour obtenir les logarithmes des mêmes nombres dans un système quelconque. Si, par exemple, il s'agit des logarithmes vulgaires dont la base est 10, on a, en désignant par v le logarithme vulgaire d'un nombre et par u son logarithme népérien,

$$10^v=e^u,$$

d'où

$$v\log' 10=u$$

et

$$v = \frac{1}{\log'.10} u.$$

Le nombre constant par lequel il faut multiplier les logarithmes népériens pour obtenir des logarithmes vulgaires est donc dans ce cas

$$\frac{1}{\log' 10}$$

ou

$$\frac{1}{2,3025851}$$

ou enfin

$$0,4342945.$$

Ce multiplicateur fixe porte le nom de *module* du système dont la base est 10.

80. — *Développement de* $(a+b)^m$ *pour* m *quelconque.* Les nombres a et b étant généralement inégaux, soit $a > b$. On posera $b = ax$, d'où $(a+b)^m = a^m(1+x^m)$; et la question est ramenée à développer $(1+x)^m$, x étant moindre que l'unité.

Soit donc

$$f(x) = (1+x)^m,$$

d'où

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1},$$
$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},$$
$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}.$$
. . . .

On trouvera successivement

$$f(0) = 1,$$

d'où

$$f'(0) = m,$$
$$f''(0) = m(m-1),$$
$$f'''(0) = m(m-1)(m-2).$$
. . . .

enfin

$$f^n(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}.$$

Par conséquent, la formule de Maclaurin donnera

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n(1+\theta x)^{m-n}.$$

C'est la formule connue du binôme, étendue au cas de m quelconque, et complétée par le reste

$$R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n(1+\theta x)^{m-n}.$$

Il faut montrer que ce reste tend vers zéro à mesure que n augmente. La remarque du n° 65 n'est plus applicable à ce cas, attendu que dans $f^n(x)$ le coefficient

$$m(m-1)\ldots(m-n+1)$$

croît indéfiniment en valeur absolue. Mais on peut prendre le tour de démonstration suivant. Regardons d'abord m comme positif.

Supposons que nous prenions un terme de plus dans le développement, et soit R_{n+1} le nouveau reste, on aura

$$R_{n+1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{1.2\ldots n.(n+1)}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}.$$

En comparant ces deux restes consécutifs, on reconnait aisément que l'on a

$$R_{n+1} = R_n \cdot \frac{m-n}{n+1} \cdot \frac{x}{1+\theta x}.$$

Si l'on suppose qu'on ait poussé le développement assez loin pour que n soit plus grand que m, on aura, en valeur absolue,

$$R_{n+1} = R_n \cdot \frac{n-m}{n+1} \cdot \frac{x}{1+\theta x},$$

d'où, en remarquant que $n-m$ est moindre que $n+1$,

$$R_{n+1} < R_n \cdot \frac{x}{1+\theta x},$$

et à fortiori

$$R_{n+1} < R_n x.$$

Si R_{n+2}, R_{n+3}, ..., R_{n+p} représentent de même les restes successifs qu'on obtiendrait en prenant $2, 3, \ldots p$ termes de plus, on trouverait de même

$$\begin{aligned} R_{n+2} &< R_{n+1} \cdot x, \\ R_{n+3} &< R_{n+2} \cdot x, \\ &\cdots\cdots \\ R_{n+p} &< R_{n+p-1} \cdot x, \end{aligned}$$

d'où, en multipliant toutes ces inégalités membre à membre, et simplifiant,

$$R_{n+p} < R_n \cdot x^p.$$

Or, x étant moindre que 1 par hypothèse, on peut toujours prendre p assez grand pour que x^p soit moindre que toute quantité donnée. D'ailleurs R_n est une quantité déterminée et fixe; donc enfin R_{n+p} peut être rendu lui-même plus petit que toute quantité assignable.

Si m est négatif mais moindre que 1, la fraction $\frac{n-m}{n+1}$, qu'on peut alors écrire, en mettant le signe de m en évidence, $\frac{n+m}{n+1}$, est encore une quantité plus petite que l'unité; ainsi le raisonnement qui précède subsiste.

Si m est négatif et plus grand que 1, on peut toujours prendre n assez grand pour que le multiplicateur de R_n, c'est-à-dire $\frac{n+m}{n+1} \cdot \frac{x}{1+\theta x}$, soit plus petit qu'une fraction déterminée k, comprise entre x et l'unité. Car ce multiplicateur est moindre que $\frac{n+m}{n+1} \cdot x$; et si l'on satisfait à l'inégalité

$$(1) \qquad \frac{n+m}{n+1} x < k,$$

on satisfera à fortiori à l'inégalité

$$(2) \qquad \frac{n+m}{n+1} \cdot \frac{x}{1+\theta x} < k.$$

Or la relation (1) donne

$$nx + mx < kn + k.$$

Si mx est moindre que k, cette inégalité est satisfaite, quel que soit n, puisque x est moindre que k. Si mx est supérieur à k, on tire de cette relation

$$n > \frac{mx - k}{k - x},$$

inégalité à laquelle il est toujours possible de satisfaire.

Dès lors on aura

$$R_{n+1} < R_n \cdot k,$$

et l'on en déduira comme plus haut

$$R_{n+p} < R_n \cdot k^p,$$

et, comme k est moindre que 1, on pourra toujours prendre p assez grand pour que R_{n-p} soit aussi petit que l'on voudra. donc le reste tend vers zéro, puisque k^p peut devenir aussi petit que l'on voudra.

Soit, en second lieu, à développer $(a-b)^m$; on posera

comme plus haut $b=ax$; et la question sera ramenée à développer $(1-x)^m$. En opérant comme ci-dessus, on trouvera

$$(1-x)^m=1-\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots \pm R_n.$$

C'est encore la formule du binôme, complétée par le reste R_n.

Si l'on adopte la seconde forme du reste (68), on a

$$R_n=\frac{m(m-1\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}x^n(1-\theta x)^{m-n}(1-\theta)^n.$$

D'après la loi de formation de ce reste, on trouve aisément

$$R_{n+1}=R_n.\frac{m-n}{n}.x\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right),$$

ou, en valeur absolue, dès que n est plus grand que m,

$$R_{n+1}=R_n.\frac{n-m}{n}.x\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right).$$

Si m est positif, la quantité $\frac{n-m}{n}$ est une fraction; il en est de même d'ailleurs de la quantité entre crochets; on a donc

$$R_{n+1}<R_n.x,$$

et l'on en déduira comme plus haut,

$$R_{n+p}<R_n.x^p,$$

d'où il résulte que le reste tend vers zéro, puisque, x étant une fraction, x^p peut être rendu aussi petit qu'on voudra.

Si m est négatif, le multiplicateur de R_n devient

$$\frac{n+m}{n}x\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right);$$

on a donc

$$R_{n+1} < R_n . \frac{n+m}{n} . x.$$

Or, si k est une fraction comprise entre x et l'unité, et qu'on pose

$$\frac{n+m}{n} . x < k, \quad \text{on en tire} \quad n > \frac{mx}{k-x},$$

relation à laquelle on peut toujours satisfaire. On peut donc écrire

$$R_{n+1} < R_n . k,$$

d'où, comme ci-dessus,

$$R_{n+p} < S_n . k^p.$$

Donc le reste tend vers zéro, puisque k^p peut devenir aussi petit que l'on voudra.

§ 2. — VÉRITABLE VALEUR DES EXPRESSIONS QUI PRENNENT L'UNE DES FORMES $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$

81. — Soit $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ une expression fractionnaire, dont les deux termes s'annulent pour une valeur particulière a de la variable x; on aura

$$\varphi(a) = 0, \ \psi(a) = 0;$$

et l'expression se présentera sous la forme $\frac{0}{0}$. Pour en trouver la vraie valeur, on commence par remplacer d'abord x par $a+h$, h étant une quantité que l'on fera ensuite tendre vers zéro; le résulat définitif sera le même que si l'on eût fait immédiatement $x=a$; mais la forme indéterminée aura disparu. On aura, en effet,

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)},$$

ou

$$\frac{\varphi(a) + \varphi'(a)\frac{h}{1} + \varphi''(a)\frac{h^2}{1.2} + \varphi'''(a)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots}{\psi(a) + \psi'(a)\frac{h}{1} + \psi''(a)\frac{h^2}{1.2} + \psi'''(a)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots}.$$

Supprimant $\varphi(a)$ et $\psi(a)$, qui sont nuls par hypothèse, et divisant les deux termes de l'expression par h, on obtient

$$\frac{\varphi'(a) + \varphi''(a)\frac{h}{1.2} + \varphi'''(a)\frac{h^2}{1.2.3} + \ldots}{\psi'(a) + \psi''(a)\frac{h}{1.2} + \psi'''(a)\frac{h^2}{1.2.3} + \ldots}.$$

Faisant tendre maintenant h vers zéro, il ne reste que le premier terme de chaque développement, et il vient en définitive

$$\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)},$$

c'est-à-dire que *lorsqu'une expression fractionnaire prend la forme* $\frac{0}{0}$ *pour une valeur particulière* a *de la variable, il suffit, pour obtenir la vraie valeur de cette expression, de remplacer chacun des deux termes par sa dérivée, et de faire ensuite* $x = a$.

Ce qui précède suppose uniquement qu'on puisse appliquer à chacun des deux termes la formule de Taylor (64), c'est-à-dire que les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ soient continues depuis la valeur $x = a$ jusqu'à une valeur très-voisine $x = a + h$.

Si les dérivées $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ s'annulaient toutes deux pour $x = a$, il faudrait appliquer la règle précédente à l'expression $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, c'est-à-dire remplacer chacun des deux termes par sa dérivée, et faire ensuite $x = a$, ce qui donnerait $\frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}$. On continuerait généralement ainsi à remplacer les

deux termes de l'expression obtenue par leurs dérivées, jusqu'à ce qu'on obtienne deux termes qui ne s'annulent pas à la fois.

Exemple. L'expression $\frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$ prend la forme $\frac{0}{0}$ quand on y fait $x=0$. Remplaçons les deux termes par leurs dérivées, nous aurons $\frac{1-\cos x}{\sin x}$. Les deux termes de cette seconde expression s'annulent encore pour $x=0$; remplaçons-les par leurs dérivées, nous obtiendrons $\frac{\sin x}{\cos x}$, expression qui, pour $x=0$, se réduit à $\frac{0}{1}$, c'est-à-dire à *zéro*. Telle est donc la vraie valeur de l'expression proposée.

82. — On ramène à la règle précédente les expressions qui prennent la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Soit, en effet, une expression $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ qui, pour $x=a$, prenne la forme $\frac{\infty}{\infty}$. On pourra l'écrire $\frac{\left[\frac{1}{\psi(x)}\right]}{\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]}$; désignons par $\Psi(x)$ et $\Phi(x)$ ses deux termes. Puisque l'on a $\psi(a)=\infty$ et $\varphi(a)=\infty$, il en résulte

$$\frac{1}{\psi(a)}=0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varphi(a)}=0,$$

ou

$$\Psi(a)=0, \quad \Phi(a)=0.$$

La question revient donc à chercher la vraie valeur d'une expression

$$\frac{\Psi(x)}{\Phi(x)},$$

dont les deux termes s'annulent pour $x=a$. Cette valeur sera donc

$$\frac{\Psi''(a)}{\Phi'(a)}.$$

Exemple. Soit l'expression

$$\frac{(1-x)^{-1}}{\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2}},$$

qui pour $x=1$ prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$; on pourra la mettre sous la forme

$$\frac{\cot\frac{\pi x}{2}}{1-x},$$

qui pour $x=1$ prend la forme $\frac{0}{0}$.

Remplaçant les deux termes de celle-ci par leurs dérivées, on obtient

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}}{1},$$

quantité qui pour $x=1$ prend la valeur $\frac{\pi}{2}$; telle est la vraie valeur de l'expression proposée.

83. — On ramène encore à la même règle les expressions qui prennent la forme $0\times\infty$. Soit en effet une expression $\varphi(x).\psi(x)$, telle que $\varphi(a)=0$ et $\psi(a)=\infty$. On pourra l'écrire

$$\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}} \text{ ou } \frac{\varphi(x)}{\Psi(x)},$$

en représentant par $\Psi(x)$ l'inverse de $\varphi(x)$. Or, puisque $\psi(a)=\infty$, $\frac{1}{\psi(a)}=0$, c'est-à-dire $\Psi(a)=0$. La vraie valeur de l'expression $\frac{\varphi(x)}{\Psi(x)}$ est donc $\frac{\varphi'(a)}{\Psi'(a)}$.

Exemple. Soit l'expression $x.\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$, qui, pour $x=\infty$, prend la forme $\infty\times 0$. On l'écrira d'abord

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \text{ou} \quad \frac{\log(1+u)}{u},$$

en faisant $\frac{1}{x}=u$. Pour $x=\infty$, il vient $u=0$; il faut donc chercher ce que devient $\frac{\log(1+u)}{u}$ pour $u=0$. Les deux termes devenant nuls en même temps, on les remplacera par leurs dérivées, et l'on aura $\frac{\frac{\log e}{1+u}}{1}$, expression qui, pour $u=0$ ou $x=\infty$, se réduit à $\log e$; telle est donc la vraie valeur de l'expression proposée.

§ 3. — MAXIMA ET MINIMA DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE

81. — *Une fonction* f (x) *est croissante ou décroissante à partir d'une valeur déterminée de* x *selon que sa dérivée est positive ou négative.* On a, en effet, par la formule de Taylor, bornée au premier terme (64),

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h);$$

par conséquent, $f(x+h)$ sera plus grand que $f(x)$, si $f'(x)$ conserve une valeur positive de x à $x+h$; et dans ce cas, la

fonction $f(x)$ sera *croissante*. Au contraire, $f(x+h)$ sera moindre que $f(x)$ si $f'(x)$ est négatif de x à $x+h$; et dans ce cas, la fonction $f(x)$ sera *décroissante*.

85. — Il peut arriver qu'une fonction $f(x)$ soit croissante de $x=a-h$ à $x=a$, puis décroissante de $x=a$ à $x=a+h$, h étant une quantité très-petite. On dit alors que $f(a)$ est un ***maximum***.

Il peut arriver, au contraire, que la fonction soit décroissante de $x=a-h$ à $x=a$, puis croissante de $x=a$ à $x=a+h$. On dit alors que $f(a)$ est un *minimum*.

Dans le premier cas, $f'(x)$ passe du positif au négatif quand x atteint la valeur a; dans le second cas, $f'(x)$ passe, au contraire, du négatif au positif. — La fonction $f'(x)$ ne peut ainsi changer de signe sans passer par 0 ou par ∞. La condition nécessaire pour que $x=a$ corresponde à un maximum ou à un minimum de $f(x)$ est donc que, pour $x=a$, la dérivée $f'(x)$ devienne nulle ou infinie. Nous examinerons successivement ces deux cas.

86. — Supposons d'abord que la fonction $f(x)$ et toutes ses dérivées restent finies de $x=a-h$ à $x=a+h$. Remplaçons x par ces deux valeurs, développons $f(a-h)$ et $f(a+h)$ par la formule de Taylor ; en faisant passer $f(a)$ dans le premier membre, nous obtiendrons

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} f(a-h)-f(a) &= -f'(a)\frac{h}{1}+f''(a)\frac{h^2}{1.2} \\ &\quad -f'''(a)\frac{1.2.3}{h^3}+f^{\text{IV}}(a)\frac{h^4}{1.2.3.4}+\dots, \end{aligned} \right.$$

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} f(a+h)-f(a) &= +f'(a)\frac{h}{1}+f''(a)\frac{h^2}{1.2} \\ &\quad +f'''(a)\frac{h^3}{1.2.3}+f^{\text{IV}}(a)\frac{h^4}{1.2.3.4}+\dots. \end{aligned} \right.$$

Pour que $f(a)$ soit un maximum ou un minimum, il faut que les deux différences $f(a-h)-f(a)$ et $f(a+h)-f(a)$ soient

de même signe. Or on démontre en algèbre (voy. l'*Appendice*) que lorsqu'un polynome est ordonné par rapport aux puissances croissantes d'une variable h, on peut toujours prendre cette variable assez petite pour que le premier terme du polynome donne son signe à tout le développement. Pour que les seconds membres des relations (1) et (2) soient de même signe, il faut donc que les termes $-f'(a) \,.\, h$ et $+f'(a)\, h$., qui sont de signe contraire, disparaissent ; ce qui exige qu'on ait

$$(3) \qquad f'(a) = 0.$$

Les valeurs de x qui rendent $f(x)$ maximum ou minimum sont donc comprises parmi les racines de l'équation (3).

Supposons cette condition remplie ; les seconds membre des deux relations (1) et (2) auront le même premier terme $f''(a)\,\frac{h^2}{1.2}$; ils seront donc de même signe ; et ce signe sera celui de $f''(a)$, puisque h^2 est positif. Si $f''(a)$ est positif, il en sera de même des premiers membres de (1) et (2) ; on aura donc à la fois

$$f(a) < f(a-h) \quad \text{et} \quad f(a) < f(a+h) ;$$

ainsi $f(a)$ sera un minimum. Si $f''(a)$ est négatif, il en sera de même des premiers membres de (1) et (2) ; on aura donc à la fois

$$f(a) > f(a-h) \quad \text{et} \quad f(a) > f(a+h) ;$$

ainsi $f(a)$ sera un maximum. La valeur $x = a$, qui annule $f'(x)$, correspondra donc à un minimum ou à un maximum, suivant que $f''(a)$ sera positif ou négatif.

87. — Mais il pourrait arriver que $f''(a)$ fût nul. Les seconds membres des relations (1) et (2), ayant alors pour premier terme l'une $-f'''(x)\,\frac{h^3}{1.2.3}$ et l'autre $+f'''(x)\,\frac{h^3}{1.2.3}$, qui sont de signe contraire, les premiers membres seraient de signe contraire, et il n'y aurait ni maximum ni minimum. Pour

qu'il y ait l'un ou l'autre, il faut donc que ces termes disparaissent, ce qui exige qu'on ait $f'''(a)=0$. Et dans ce cas les premiers membres des relations (1) et (2) seront tous deux positifs ou tous deux négatifs, c'est-à-dire qu'on aura un minimum ou un maximum, suivant que $f^{\text{iv}}(a)$ sera positif ou négatif.

On pourrait supposer aussi $f^{\text{iv}}(a)=0$ et passer aux dérivées suivantes; on verrait ainsi que, *pour qu'il y ait minimum ou maximum, il faut que la première dérivée qui ne s'annule pas pour* x=a *soit d'ordre pair; et que, dans ce cas, on aura un minimum ou un maximum selon que cette dérivée sera positive ou négative pour* x=a.

On voit donc quelle est la marche à suivre pour trouver les maxima et minima d'une fonction d'une variable : égaler sa première dérivée à zéro; tirer les racines de l'équation ainsi posée; substituer chacune de ces racines dans les dérivées successives de la fonction; si la première dérivée qui ne s'annule pas par cette substitution est d'ordre impair, il n'y a ni maximum ni minimum; si elle est d'ordre pair, on a un minimum ou un maximum selon qu'elle prend le signe + ou le signe —.

68. — *Exemples*. I. Soit

$$f(x)=x^5-4x^4+6x^3-4x^2+x.$$

On aura d'abord

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4-16x^3+18x^2-8x+1, \\ f''(x) &= 20x^3-48x^2+36x-8 \\ f'''(x) &= 60x^2-96x+36, \\ f^{\text{iv}}(x) &= 120x-96, \\ f^{\text{v}}(x) &= 120. \end{aligned}$$

L'équation $f'(x)=0$ a une racine simple $x=\frac{1}{5}$ et une racine triple $x=1$. Si l'on substitue $x=\frac{1}{5}$ dans la seconde dérivée, elle

prend la valeur $-2{,}6$; il en résulte que $x=\frac{1}{5}$ correspond à un maximum.

La racine $x=1$ annule les dérivées $f''(x), f'''(x)$ et donne $f^{\text{IV}}(x)=+24$; il en résulte que $x=1$ correspond à un minimum.

89. — II. *Partager le nombre* a *en deux parties telles que le produit de la puissance* p *de la première par la puissance* q *de la seconde soit un maximum* (p *et* q *étant deux nombres entiers*).

On aura ici $f(x)=x^p(a-x)^q$, en désignant par x la première partie. En égalant à zéro la dérivée de cette fonction, on trouve

$$px^{p-1}(a-x)^q-qx^p(a-x)^{q-1}=0$$

ou

$$x^{p-1}(a-x)^{q-1}.[p(a-x)-qx]=0.$$

Cette équation admet trois racines :

$$x=0, \quad x=a \quad \text{et} \quad x=\frac{p}{p+q}a.$$

Les deux premières ne répondent pas à la question ; il faut donc considérer la troisième.

On trouve

$$f''(x)=[p(a-x)-qx].\frac{d.x^{p-1}(a-x)^{q-1}}{dx}-(p+q)x^{p-1}(a-x)^{q-1}.$$

Si l'on met pour x la valeur $\frac{p}{p+q}.a$, le premier terme disparaît, et le second prend une valeur négative ; la valeur substituée correspond donc à un maximum.

De

$$x = \frac{p}{p+q} \cdot a, \quad \text{on déduit} \quad a - x = \frac{q}{p+q} \cdot a,$$

d'où

$$\frac{x}{a-x} = \frac{p}{q},$$

c'est-à-dire que les deux parties du nombre a doivent être proportionnelles aux exposants p et q. Quant au maximum cherché, il a pour valeur

$$\frac{p^p \cdot q^q}{(p+q)^{p+q}} \cdot a^{p+q}.$$

90. — III. *Inscrire dans une ellipse un rectangle dont la surface soit un maximum.* — Les médianes du rectangle inscrit partageant chacune en deux parties égales deux cordes parallèles à l'autre, forment un système de diamètres conjugués rectangulaire; ce sont donc les axes de la courbe. Si x et y sont les coordonnées de l'un des sommets du rectangle, rapportées à ces axes, la surface du rectangle est exprimée par $4xy$, ou, en mettant pour y sa valeur,

$$4\frac{b}{a}\, x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

La fonction à rendre maximum est donc $x\sqrt{a^2 - x^2}$, ou, ce qui revient au même, $\sqrt{a^2x^2 - x^4}$. On peut donc poser

$$f(x) = a^2x^2 - x^4.$$

La dérivée égalée à zéro conduit à l'équation

$$2a^2x - 4x^3 = 0,$$

ou

$$x(a^2 - 2x^2) = 0.$$

Cette équation a trois racines :

$$x = 0, \quad \text{et} \quad x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

La première ne répond pas à la question. Si l'on substitue l'un des deux autres dans la seconde dérivée

$$2a^2 - 12x^2,$$

on obtient $-4a^2$, quantité négative. Les valeurs

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$

correspondent donc à un maximum. Elles ne forment d'ailleurs qu'une seule et même solution, attendu que si x et y sont les coordonnées d'un des sommets du rectangle, $-x$ et $-y$ sont les coordonnées du sommet opposé.

De

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{on déduit} \quad y = \frac{b}{\sqrt{2}},$$

d'où

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}.$$

On obtient donc un des sommets du rectangle demandé en cherchant l'intersection de l'ellipse avec la droite

$$y = \frac{a}{b}\, x,$$

qui n'est autre que la diagonale du rectangle construit sur les deux demi-axes.

Si l'ellipse devient un cercle, le rectangle inscrit maximum devient un carré.

91. — IV. *Étant donné le volume d'un cylindre, déter-*

miner ses dimensions de manière que sa surface soit un minimum. On a à résoudre ce problème toutes les fois que l'on veut construire un vase cylindrique d'une capacité donnée et employer le moins de matière possible. Mais il faut distinguer deux cas.

Le vase peut être ouvert à la partie supérieure. Soit alors y sa hauteur et x le rayon de sa base; si V est la capacité donnée, on aura

$$\pi x^2 y = V,$$

nous représenterons V par πa^3 pour la commodité de l'écriture. Nous aurons ainsi

$$(1) \qquad x^2 y = a^3.$$

La surface du cylindre sera exprimée par

$$\pi x^2 + 2\pi x y,$$

ou, en mettant pour y sa valeur tirée de la relation (1),

$$\pi x^2 + \frac{2\pi a^3}{x}.$$

La quantité à rendre minimum est donc

$$f(x) = x^2 + \frac{2a^3}{x}.$$

En égalant en zéro sa dérivée, on forme l'équation

$$2x - \frac{2a^3}{x^2} = 0, \text{ d'où l'on tire } x^3 = a^3, \text{ ou } x = a.$$

Par suite l'équation (1) donne aussi $y = a$. C'est-à-dire qu'*on obtient le minimum de surface en faisant le rayon de la base égal à la hauteur.* Ce minimum de surface est

$$\pi a^2 + 2\pi a^2 \quad \text{ou} \quad 3\pi a^2,$$

ou, en remarquant que $a = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$,

$$3\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2}}, \quad \text{ou enfin,} \quad 3\sqrt[3]{\pi V^2}.$$

C'est bien un minimum, car on a $f''(x) = 2 + \frac{4a^3}{x^3}$, quantité positive pour $x = a$.

Le vase peut être fermé à la partie supérieure. En conservant les mêmes notations, la relation (1) subsiste encore; mais la surface est exprimée par

$$2\pi x^2 + 2\pi xy, \quad \text{ou} \quad 2\pi x^2 + \frac{2\pi a^3}{x},$$

et la quantité à rendre minimum est alors

$$f(x) = x^2 + \frac{a^3}{2}.$$

La dérivée égalée à zéro donne l'équation

$$2x - \frac{a^3}{x^3}, \quad \text{d'où} \quad x^3 = \frac{a^3}{2};$$

si l'on met dans (1) $2x^3$ à la place de a^3, on obtient $y = 2x$. C'est-à-dire que dans ce cas *on obtient le minimum de surface en faisant la hauteur égale au diamètre de la base.* Le minimum a pour valeur

$$2\pi x^2 + 4\pi x^2, \quad \text{ou} \quad 6\pi x^2,$$

ou

$$\frac{6\pi a^2}{\sqrt[3]{4}}, \quad \text{ou encore} \quad 6\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}.$$

On reconnaîtrait comme ci-dessus que c'est bien un minimum.

92. — Nous avons dit que $f'(x)$ peut changer de signe en passant par la valeur *zéro* ou par la valeur *infinie;* nous avons examiné le premier cas; il nous reste à parler du second.

Concevons donc que pour $x=a$, $f'(x)$ devienne infini, la fonction $f(x)$ restant d'ailleurs finie. Si, de $x=a-h$ à $x=a$, $f'(x)$ est positif, et qu'il devienne négatif de $x=a$ à $x=a+h$, $f(a)$ sera un maximum; car la fonction $f(x)$ croîtra de $a-h$ à a, et décroîtra de a à $a+h$.

Si, de $x=a-h$ à $x=a$, $f'(x)$ est négatif, et qu'il devienne positif de $x=a$ à $x=a+h$, $f(a)$ sera un minimum; car $f(x)$ décroîtra de $a-h$ à a, et croîtra de a à $a+h$.

Soit, par exemple, la fonction

$$f(x)=1+\tfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}},$$

on trouve

$$f'(x)=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Pour $x=0$, cette dérivée devient infinie. D'ailleurs elle est négative ou positive en même temps que x; de $x=-h$ à $x=+h$ elle passe donc du négatif au positif; donc $f(0)$ ou 1 est un minimum.

C'est surtout dans la discussion des courbes que l'on rencontre des exemples de maxima ou de minima donnés par $f'(a)=\infty$.

§ 4. — MAXIMA ET MINIMA DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES.

93. — On dit qu'une fonction $f(x, y)$ de deux variables indépendantes est *maximum* pour $x=a$ et $y=b$, lorsque la quantité $f(a+h, b+k)$ est moindre que $f(a, b)$, les quantités h et k étant des accroissements positifs ou négatifs aussi petits que l'on voudra. On dit que la fonction $f(x, y)$ est *mi-*

nimum pour $x=a$, $y=b$, lorsque, pour les mêmes accroissements h et k, la quantité $f(a+h, b+k)$ est plus grande que $f(a, b)$.

Posons $k=\varepsilon h$, ε étant le rapport algébrique, d'ailleurs arbitraire, que l'on établit entre k et h. Développons $f(x+h, y+\varepsilon h)$ par la formule de Taylor (70); nous aurons, en passant $f(x, y)$ dans le premier membre,

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} f(x+h, y+\varepsilon h)-f(x, y)=\frac{h}{1}\left(\frac{df}{dx}+\varepsilon\frac{df}{dy}\right) \\ \quad +\frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2f}{dx^2}+2\varepsilon\frac{d^2f}{dx\,dy}+\varepsilon^2\frac{d^2f}{dy^2}\right)+\ldots, \end{array}\right.$$

relation dans laquelle nous supposerons que x et y aient les valeurs a et b.

Pour que la différence $f(x+h, y+k)-f(x, y)$ conserve son signe, quels que soient les signes des accroissements h et k, il faut que le second membre de (1) conserve son signe, quel que soit le signe de h. Or, ce développement étant ordonné par rapport aux puissances croissantes de h, on peut toujours supposer h assez petit pour que le premier terme donne son signe à tout le développement; il faut donc que le terme affecté de la première puissance de h disparaisse et qu'on ait

$$\frac{df}{dx}+\varepsilon\frac{df}{dy}=0.$$

Mais cette condition doit être remplie quel que soit le rapport ε; il faut donc que l'on ait séparément

$$(2)\qquad \frac{df}{dx}=0, \quad \text{et} \quad \frac{df}{dy}=0,$$

ce sont les conditions communes au maximum et au minimum. Les valeurs $x=a$ et $y=b$ devront satisfaire à ces deux équations; elles seront donc comprises parmi les systèmes de valeurs qu'admettent ces deux équations.

94. — Supposons les conditions (2) remplies; le système $x=a$, $y=b$ pourra répondre à un maximum ou à un minimum. Pour que ce soit un maximum, il faut que la différence qui forme le premier membre de la relation (1) soit négative; or, le second membre commence alors par le terme en h^2 qui donnera son signe à tout le développement si h est suffisamment petit; il faut donc que ce terme en h^2 soit négatif, et qu'on ait par conséquent, quel que soit ε,

$$(3) \qquad \frac{d^2f}{dx^2}+2\varepsilon\frac{d^2f}{dx\,dy}+\varepsilon^2\frac{d^2f}{dy^2}<0$$

quand on mettra pour x et pour y les valeurs a et b données par les équations (2). Soient A, B, C les valeurs que prennent dans ce cas les quantités

$$\frac{d^2f}{dx^2},\quad \frac{d^2f}{dx\,dy},\quad \frac{d^2f}{dy^2}.$$

On devra avoir, quel que soit ε,

$$(4) \qquad A+2B\varepsilon+C\varepsilon^2<0.$$

D'après les propriétés des trinomes du second degré, cette condition exige qu'on ait à la fois

$$(5) \qquad C<0,\quad \text{et}\quad B^2-AC\leqq 0;$$

la seconde relation est nécessaire pour que le trinome conserve son signe, quel que soit ε, et la première est nécessaire pour que ce signe soit négatif. Si les relations (5) sont satisfaites, le système $x=a$, $y=b$ correspondra à un maximum.

On verrait de la même manière que, pour que ce système corresponde à un minimum, il faut et il suffit que l'on ait à la fois

$$(6) \qquad C>0,\quad \text{avec}\quad B^2-AC\leqq 0,$$

95. — *Exemple.* Soit proposé d'inscrire dans une sphère

de rayon R un parallélépipède rectangle dont le volume soit un maximum. Rapportons la sphère à trois axes parallèles aux arêtes du parallélépipède ; et soient x, y, z les coordonnées de l'un des sommets. Le volume du parallélépipède aura pour valeur $8xyz$, ou, en remarquant que

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

$$8xy\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad \text{ou encore} \quad 8\sqrt{x^2y^2(R^2 - x^2 - y^2)}.$$

La fonction à rendre maximum est donc

$$f(x, y) = R^2x^2y^2 - x^4y^2 - x^2y^4.$$

On en tire successivement

$$\frac{df}{dx} = 2R^2xy^2 - 4x^3y^2 - 2xy^4; \quad \frac{df}{dy} = 2R^2x^2y - 2x^4y - 4x^2y^3;$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 2R^2y^2 - 12x^2y^2 - 2y^4; \quad \frac{d^2f}{dx\,dy} = 4R^2xy - 8x^3y - 8xy^3;$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} = 2R^2x^2 - 2x^4 - 12x^2y^2.$$

Si l'on égale à zéro les dérivées partielles $\frac{df}{dx}$ et $\frac{df}{dy}$, en supprimant dans la première le facteur $2xy^2$, et dans la seconde le facteur $2x^2y$, qui donneraient des solutions étrangères à la question que l'on a en vue, on obtient les deux équations

$$R^2 - 2x^2 - y^2 = 0, \quad \text{et} \quad R^2 - x^2 - 2y^2 = 0,$$

qui donnent

$$x = y = \frac{R}{\sqrt{3}},$$

en ne prenant que la solution positive. Si l'on substitue ces valeurs dans les dérivées partielles du second ordre, on trouve après réduction

$$A = -\frac{8}{9}R^4; \quad B = -\frac{4}{9}R^4; \quad C = -\frac{8}{9}R^4.$$

Le coefficient C est donc négatif; on trouve d'ailleurs

$$B^2 - AC = -\frac{16}{27} R^4,$$

quantité négative; les deux conditions (5) sont donc remplies, et les valeurs $x = y = \frac{R}{\sqrt{3}}$ répondent à un maximum.

Ces valeurs donnent $z = \frac{R}{\sqrt{3}}$; il en résulte que le parallélépipède maximum est le cube. Son volume est $8 \cdot \frac{R^3}{3\sqrt{3}}$.

96. — Si le terme en h^2 dans le développement (1) devenait nul pour $x = a$ et $y = b$, il faudrait pousser le développement plus loin. On verrait que le terme en h^3 doit disparaître, et que dans ce cas il y a maximum ou minimum, suivant que le terme en h^4 prendra une valeur négative ou positive. Mais cette circonstance ne se présente pas d'ordinaire dans les applications.

On pourrait aussi généraliser la question qui fait l'objet de ce paragraphe, et l'on reconnaîtrait, par des moyens analogues, que pour qu'une fonction de plusieurs variables indépendantes devienne maximum ou minimum pour un système de valeurs de ces variables, il faut que ces valeurs annulent les dérivées partielles du premier ordre, etc. Mais nous n'insisterons pas sur ce sujet plus curieux qu'utile, pour lequel nous renverrons aux traités plus étendus. Pour des raisons analogues, nous n'examinerons pas ici le cas où les dérivées partielles du premier ordre deviendraient infinies.

VII. APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

§ 1. — TANGENTES ET NORMALES AUX COURBES PLANES.

97. — On sait que l'on appelle *tangente* à une courbe, en un point donné de cette courbe, la limite des positions que

prend une sécante menée par ce point, lorsqu'on la fait tourner jusqu'à ce qu'un second point d'intersection vienne se confondre avec le premier.

L'équation de la tangente se déduit immédiatement de cette définition. Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe, x et y les coordonnées du point par lequel on veut mener la tangente, $x + \Delta x$ et $y + \Delta y$ les coordonnées d'un point voisin pris sur la même courbe. L'équation de la sécante passant par ces deux points sera, en désignant par X et Y les coordonnées courantes, et appliquant l'équation connue de la droite passant par deux points donnés,

$$Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x).$$

Si l'on fait tourner la sécante autour du point x, y jusqu'à ce que le second point $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ vienne se confondre avec le premier, Δx et Δy tendront simultanément vers zéro, et $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tendra vers la dérivée $f'(x)$ ou y' de la fonction donnée $f(x)$. En même temps la sécante tendra vers la position pour laquelle elle prend le nom de tangente. L'équation de la tangente sera donc

$$(1) \qquad Y - y = y'(X - x).$$

Si l'on met pour y et pour y' leurs valeurs en x, on peut écrire

$$(2) \qquad Y - f(x) = f'(x)(X - x).$$

On voit que lorsque l'abscisse x du point de contact sera donnée, tout sera connu dans l'équation (2), et il sera facile de construire la droite qu'elle représente.

98. — La forme de l'équation (2) suggère souvent un moyen géométrique simple pour mener la tangente. C'est ce

qui arrive pour les courbes du second degré ; nous renverrons à cet égard aux traités de Géométrie analytique. Nous nous contenterons des deux exemples qui suivent.

I. — Soit la courbe $y = x^m$. On en tire

$$y' = mx^{m-1} = \frac{mx^m}{x} = \frac{my}{x}.$$

Pour construire la tangente au point M, on prendra donc, sur la direction de l'ordonnée, une longueur PN égale à my ou $m.\text{MP}$; on joindra ON, et par le point M on mènera MT parallèle à ON ; ce sera la tangente demandée, car on a

Fig. 1.

$$\text{tang MTP} = \text{tang NOP} = \frac{\text{NP}}{\text{OP}} = \frac{my}{x}.$$

II. — Soit la courbe $y = \text{A} \log x$. On a dans ce cas

$$y' = \frac{\text{A} \log e}{x}.$$

Pour construire la tangente en M, on prendra d'abord sur l'axe des y une longueur OH égale à $\text{A} \log e$; on joindra le point fixe H au pied P de l'ordonnée, et par le point M on mènera MT parallèle à PH ; ce sera la tangente demandée ; car on a

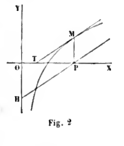


Fig. 2

$$\text{tang MTP} = \text{tang HPO} = \frac{\text{HO}}{\text{OP}} = \frac{\text{A} \log e}{x}.$$

99. — Si dans l'équation (8) de la tangente on fait $\text{X} = x + h$, h étant une quantité infiniment petite, on en tire

$$\text{Y} = f(x) + f'(x) \cdot h.$$

Or la formule de Taylor (64) donne pour l'ordonnée $f(x+h)$ de la courbe qui répond à l'abscisse $x+h$, la valeur

$$f(x+h)=f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{1.2}+f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}+\dots$$

Il en résulte

$$Y-f(x+h)=-f''(x)\frac{h^2}{1.2}-f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}-\dots$$

Ainsi la différence entre l'ordonnée de la tangente et l'ordonnée de la courbe qui correspondent à une même abscisse, infiniment peu supérieure à celle du point de contact, est une quantité infiniment petite *du second ordre* (6). Il n'en pourrait être autrement que si $f''(x)$ devenait infini, ce que l'on ne suppose pas.

On considère souvent une courbe comme un polygone infinitésimal, c'est-à-dire comme un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits; l'un quelconque de ces côtés est alors ce que l'on appelle un *élément* de la courbe. Si M et M' sont deux sommets consécutifs de ce polygone, on regarde le côté MM', ou du moins le prolongement de ce côté, comme se confondant avec la tangente en M, et l'on dit en ce sens que la tangente en M n'est autre chose que l'élément MM' prolongé.

Cette manière de voir suppose, d'après ce qui précède, qu'on néglige les infiniment petits du second ordre, puisqu'elle revient à supposer que le point M' infiniment voisin du point M est situé sur la tangente en M. Cette hypothèse n'est plus permise dans les questions où il est nécessaire de tenir compte des infiniment petits du second ordre.

On peut présenter la même observation sous une autre forme. Si dans l'équation de la tangente on met $\frac{dy}{dx}$ à la place de $f'(x)$, on peut l'écrire

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x),$$

et il semble qu'elle soit satisfaite pour

$$X = x + dx, \quad \text{et} \quad Y = y + dy,$$

c'est-à-dire qu'il semble que la tangente passe par le point $x + dx$, $y + dy$ de la courbe infiniment voisin du point de contact. Mais, quand on fait cette substitution, il vient

$$dy = \frac{dy}{dx}\,dx,$$

relation qui n'est réellement une identité que lorsqu'on néglige les infiniment petits du second ordre (64 *bis*).

Remarque. Lorsque deux courbes sont tangentes, elles ont au point de contact une tangente commune ; il est donc facile de déduire de ce qui précède que leurs ordonnées, correspondantes à une abscisse infiniment peu supérieure à celle du point de contact, est la somme ou la différence de deux infiniment petits du second ordre, et est par conséquent elle-même un infiniment petit du second ordre.

100. — On peut avoir à mener la tangente à une courbe, par un point extérieur à cette courbe, ou parallèlement à une droite donnée.

I. — Dans le premier cas, soient α et β les coordonnées du point extérieur donné. Ces coordonnées devront satisfaire à l'équation de la tangente, et l'on aura, en appelant toujours x et y les coordonnées du point de contact,

(3) $$\beta - y = f'(x)\,(\alpha - x);$$

mais on a aussi

(4) $$y = f(x).$$

Ces deux relations serviront à déterminer les deux inconnues x et y.

On pourrait aussi considérer ces relations comme les équations de deux lieux géométriques dont les intersections sont autant de points de contact ou de solutions de la question.

L'un de ces lieux géométriques (4) est la courbe donnée elle-même.

II. — Dans le second cas, soit a le coefficient angulaire de la droite donnée.

On devra avoir $f'(x)=a$, si l'équation de la courbe est $y=f(x)$, ou plus généralement $-\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}=a$, si l'équation de la courbe est $f(x,y)=0$ (50).

Cette relation, jointe à

$$y=f(x), \quad \text{ou à} \quad f(x,y)=0,$$

servira à déterminer les coordonnées inconnues x et y du point de contact.

On pourrait aussi considérer ces deux relations comme les équations de deux lieux géométriques dont les intersections seront autant de solutions de la question.

Nous n'insisterons pas sur ces considérations, qui sont développées dans tous les traités de Géométrie analytique.

101. — On appelle *sous-tangente* la portion de l'axe des x comprise entre le pied de l'ordonnée et le pied de la tangente. Pour l'obtenir, il suffit de faire $Y=0$ dans l'équation de la tangente, car X est alors l'abscisse du pied de la tangente, et la sous-tangente n'est autre chose, en valeur absolue, que la différence $X-x$ entre cette abscisse et celle du pied de l'ordonnée. Or l'équation de la tangente, qui se réduit alors à

$$-y=y'(X-x),$$

donne

$$X-x=-\frac{y}{y'}. \tag{5}$$

Telle est l'expression de la sous-tangente. Si y' est de même signe que y, $X-x$ est négatif, c'est-à-dire que le pied de la tangente est alors à gauche du pied de l'ordonnée,

si l'on adopte les conventions ordinaires. Si y' est de signe contraire à y, $X - x$ est positif, c'est-à-dire que le pied de la tangente est alors à droite du pied de l'ordonnée.

Considérons, par exemple, la courbe

$$y = Ae^{mx};$$

on déduit de cette équation

$$y' = mAe^{mx},$$

et, par conséquent,

$$X - x = -\frac{y}{y'} = -\frac{1}{m},$$

quantité constante.

On voit que, dans cette logarithmique, la sous-tangente est constante, et que le pied de la tangente est situé à gauche du pied de l'ordonnée.

102. — On appelle *normale* la perpendiculaire à la tangente menée par le point de contact. Si les axes sont rectangulaires, ce qui est le cas le plus fréquent, surtout dans les applications, il suffit pour obtenir l'équation de la normale de changer, dans l'équation de la tangente, le coefficient angulaire y' en $-\frac{1}{y'}$, ce qui donne

(6) $$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

On pourrait, comme dans le cas de la tangente, mener la normale par un point extérieur ou parallèlement à une droite donnée; les méthodes seraient les mêmes, mais les calculs sont en général plus compliqués.

103. — On donne le nom de *sous-normale* à la portion de l'axe des x comprise entre le pied de l'ordonnée et le pied de la normale. Pour l'obtenir, il faut faire $Y = 0$ dans l'équa-

tion (6) de la normale; X est alors l'abscisse du pied de la normale, et $X - x$ est, en valeur absolue, la longueur de la sous-normale. Or l'équation (6), qui se réduit alors à

$$-y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

donne

(7) $$X - x = yy'.$$

Telle est l'expression de la sous-normale. Si y et y' sont de signe contraire, $X - x$ est négatif, et le pied de la normale est à gauche de l'ordonnée; si y et y' sont de même signe, $X - x$ est positif et le pied de la normale est à droite du pied de l'ordonnée.

Exemples. I. Considérons la parabole $y^2 = 2px$; on a dans ce cas $y' = \frac{p}{y}$, et par suite $yy' = p$, c'est-à-dire que la sous-normale est constante. En même temps yy' est positif, et le pied de la normale est à droite du pied de l'ordonnée.

II. On sait que la cycloïde est représentée par les équations

$$x = R(\alpha - \sin\alpha), \quad y = R(1 - \cos\alpha),$$

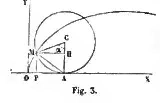


Fig. 3.

R désignant le rayon AC du cercle générateur, et α l'angle MCA que fait avec l'axe des y, ou avec CA, le rayon CM mené au point décrivant. On en tire

$$dx = R(1 - \cos\alpha)\,d\alpha, \quad \text{et} \quad dy = R\sin\alpha\,d\alpha,$$

d'où

$$y' = \frac{R\sin\alpha}{R(1 - \cos\alpha)} = \frac{R\sin\alpha}{y},$$

par suite

$$yy' = R \sin \alpha,$$

c'est-à-dire que la sous-normale est la projection PA du rayon décrivant CM sur l'axe des x. Il en résulte que *la normale à la cycloïde en un point donné* M *de cette courbe est la droite* MA *qui joint ce point au point de contact* A *du cercle générateur avec l'axe des* x.

104. — L'équation (1) de la tangente et l'équation (6) de la normale peuvent, lorsqu'on y remplace y' par $\frac{dy}{dx}$, se mettre respectivement sous la forme

(8) $$\frac{dx}{X - x} = \frac{dy}{Y - y},$$

et

(9) $$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = 0.$$

Ces formes, symétriques et faciles à retenir, sont souvent utiles dans les calculs.

§ 2. — COURBES ENVELOPPES.

105. — Lorsque l'équation d'une courbe contient un paramètre arbitraire que l'on peut faire varier, toutes les courbes qui correspondent aux différentes valeurs de ce paramètre forment ce qu'on appelle une *famille de courbes*. On appelle *enveloppe* d'une pareille famille de courbes le lieu des intersections successives des diverses courbes qui composent la famille, c'est-à-dire le lieu des intersections de deux courbes de la même famille dans lesquelles les valeurs du paramètre arbitraire ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite. Si, par exemple, $f(x, y, a) = 0$, représente l'une des courbes considérées, et $f(x, y, a + da) = 0$ une autre courbe de la

même famille ne différant de la première qu'en ce que le paramètre arbitraire a a varié d'une quantité infiniment petite, ces deux courbes seront dites infiniment voisines, et leur point d'intersection sera un des points de l'enveloppe.

106. — Le procédé à suivre pour trouver l'équation de l'enveloppe se tire de la définition même. Soit $f(x, y, a)=0$ (1) l'équation de la famille de courbes considérées. Changeons d'abord a en $a+\Delta a$, l'équation $f(x, y, a+\Delta a)=0$ (2) sera une autre courbe de la même famille ; et les coordonnées des points communs à ces deux courbes s'obtiendraient en cherchant les systèmes de valeurs de x et y, qui satisfont à la fois aux deux équations. Or on sait que l'on peut remplacer l'une de ces équations par une combinaison des deux par voie d'addition ou de soustraction. On peut donc substituer, par exemple, à la seconde la combinaison

$$f(x, y, a+\Delta a)-f(x, y, a)=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{f(x, y, a+\Delta a)-f(x, y, a)}{\Delta a}=0.$$

Supposons maintenant que l'on fasse tendre Δa vers zéro, les deux courbes deviendront consécutives, et leurs points communs appartiendront à l'enveloppe. Les coordonnées de ces points seraient donc données par la résolution des deux équations

$$f(x, y, a)=0,$$

et

$$\lim . \frac{f(x, y, a+\Delta a)-f(x, y, a)}{\Delta a}=0,$$

ou

$$f(x, y, a)=0,$$

et

(3) $$f'_a(x, y, a)=0.$$

Pour obtenir l'équation de l'enveloppe, il n'y aura donc qu'à éliminer entre ces deux équations le paramètre a qui particularise les points communs.

Ainsi, *pour obtenir l'équation de l'enveloppe des courbes représentées par une équation telle que* $f(x, y, a) = 0$, *il suffit d'éliminer le paramètre* a *entre cette équation et sa dérivée, prise par rapport à ce paramètre.*

107. — Il est aisé de reconnaître que chacune des courbes enveloppées est tangente à l'enveloppe. Soient, en effet, AB, A'B', A''B'' trois courbes consécutives de la famille considérée, M l'intersection des courbes AB et A'B', N l'intersection des courbes A'B' et A''B''. Les deux points M et N appartiendront à l'enveloppe; il en sera donc de même de l'élément infiniment petit MN; cet élément sera donc commun à l'enveloppée A'B' et à l'enveloppe. Donc l'enveloppe est tangente à l'enveloppée A'B'. On démontrerait de la même manière qu'elle est tangente à toutes les autres enveloppées.

Fig. 4.

Mais cette propriété peut être démontrée par l'analyse de la manière suivante. Puisque l'équation de l'enveloppe résulte de l'élimination du paramètre a entre les équations

$$f(x, y, a) = 0 \quad \text{et} \quad f'_a(x, y, a) = 0,$$

on peut, pour obtenir le coefficient angulaire de la tangente à l'enveloppe au point x, y, différencier l'équation $f(x, y, a) = 0$ en y regardant a comme une fonction de x et de y, cette dernière variable étant elle-même fonction de x. On obtient ainsi (33, 23)

$$\frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} + \frac{df}{da}\left(\frac{da}{dx} + y'\frac{da}{dy}\right) = 0;$$

mais $\frac{df}{da}$ est nul en vertu de l'équation $f'_a(x, y, a) = 0$, il

reste donc

$$\frac{df}{dx} + y' \frac{df}{dy} = 0,$$

c'est-à-dire que le coefficient angulaire de la tangente à l'enveloppe au point x, y est donné par la même équation que le coefficient angulaire de la tangente à l'enveloppée au même point. Donc l'enveloppée est tangente à l'enveloppe.

108. — Exemples. I. *Une droite mobile coupe les axes coordonnés à des distances* a *et* b *de l'origine, dont la somme demeure constante; on demande l'enveloppe des positions de cette droite.* Soit $a + b = m$. L'équation de la famille de droites dont il s'agit sera

(1) $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \text{ou} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{m-a} = 1.$$

Égalant à zéro la dérivée par rapport à a, on obtient

$$-\frac{x}{a^2} + \frac{y}{(m-a)^2} = 0, \quad \text{d'où} \quad a\sqrt{y} - (m-a)\sqrt{x} = 0,$$

et par suite

$$a = \frac{m\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \quad \text{et} \quad (m-a) = \frac{m\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Substituant dans (1), on trouve pour l'équation de l'enveloppe,

(2) $$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = m,$$

équation d'une parabole qui a pour axe la bissectrice du premier angle des axes coordonnés, et qui touche ces axes aux points répondant à

$$y = 0,\ x = m, \quad \text{et} \quad x = 0,\ y = m.$$

On vérifie aisément que cette parabole est tangente à chacune des droites proposées; car si l'on porte dans l'équation (1) la valeur de y donnée par l'équation (2), on obtient une équation du second degré en x qui a ses racines égales.

II. *Trouver l'enveloppe des ellipses qui ont même surface et leurs axes dirigés suivant les mêmes droites.*

Nous pouvons représenter par πr^2 la surface commune de ces ellipses; nous aurons alors

$$\pi ab = \pi r^2,$$

d'où

$$b = \frac{r^2}{a}.$$

L'équation de la famille d'ellipses considérée sera donc

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2y^2}{r^4} = 1.$$

Prenant la dérivée par rapport à a, et supprimant le facteur $2a$ devenu commun, on obtient

$$-\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{r^4} = 0,$$

d'où

$$a^4 = \frac{r^4x^2}{y^2} \quad \text{et} \quad a^2 = \pm\frac{r^2x}{y}.$$

Substituant dans (1), on trouve

$$(2) \qquad \pm\frac{xy}{r^2} \pm \frac{xy}{r^2} = 1,$$

ou

$$xy = \pm\frac{r^2}{2}.$$

L'enveloppe demandée se compose donc des deux hyperboles équilatères qui ont les axes pour asymptotes et pour puissance $\frac{r^2}{2}$.

Si l'on porte dans l'équation (1) la valeur de y tirée de l'équation (2), on obtient une équation en x qui est bicarrée et qui a ses racines égales deux à deux. On vérifie ainsi que l'enveloppe est tangente en deux points à chacune des enveloppées.

§ 3. — CONVEXITÉ ET COURBURE DES LIGNES PLANES.

100. — Un arc de courbe, aussi petit que l'on voudra, est concave du côté de sa corde, et convexe du côté opposé, c'est-à-dire du côté des tangentes menées par ses extrémités.

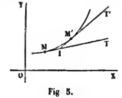


Fig 5.

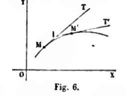


Fig. 6.

Considérons un arc très-petit MM' (fig. 5 et 6) d'une courbe dont l'équation en coordonnées rectangulaires est $y = f(x)$. Soient x et $x + h$ les abscisses de ses extrémités.

Si, comme dans la figure 5, les tangentes MT, M'T' menées aux extrémités de l'arc MM' se coupent *au-dessous* de cet arc (en regardant l'axe OY comme vertical pour fixer les idées), l'arc tourne sa convexité vers le bas, c'est-à-dire vers les y négatifs. En même temps le coefficient angulaire de la tangente M'T' est plus grand que le coefficient angulaire de la tangente MT ; ainsi le coefficient angulaire de la tangente, c'est-à-dire $f'(x)$, est une quantité croissante, depuis l'abscisse x jusqu'à l'abscisse $x + h$.

Si, comme dans la figure 6, les tangentes MT et M'T' se coupent *au-dessus* de l'arc MM', cet arc tourne sa convexité vers le haut, c'est-à-dire vers les y positifs. En même temps le coefficient angulaire de la tangente M'T' est plus petit que celui de la tangente MT ; ainsi, dans ce cas, $f'(x)$ est une quantité décroissante, depuis l'abscisse x jusqu'à l'abscisse $x+h$.

Or, d'après ce qu'on a vu au n° 84, la fonction $f'(x)$ est croissante ou décroissante, de x à $x+h$, suivant que sa dérivée $f''(x)$ est positive ou négative. On peut donc dire que l'arc MM' tourne sa convexité vers le bas ou vers le haut, selon que, de x à $x+h$, la seconde dérivée $f''(x)$ est positive ou négative.

Nous avons supposé l'ordonnée croissante dans les figures 5 et 6; les mêmes résultats subsistent en supposant l'ordonnée décroissante comme dans les figures 7 et 8. Ainsi, dans la

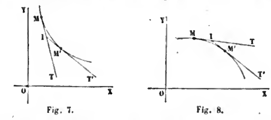


Fig. 7. Fig. 8.

figure 7, l'arc MM' tourne sa convexité vers le bas; or le coefficient angulaire de M'T' est moindre en valeur absolue que celui de MT ; et, comme ils sont tous deux négatifs, $f'(x)$ est une fonction qui croît algébriquement. Dans la figure 8, au contraire, l'arc MM' tourne sa convexité vers le haut ; or le coefficient angulaire de M'T' est plus grand en valeur absolue que celui de MT; et, comme ils sont tous deux négatifs, $f'(x)$ est une fonction qui décroît algébriquement

D'ailleurs, dans tout ce que nous venons de dire, la position de l'axe des x par rapport à l'arc considéré est indifférente; donc enfin *une courbe* $y=f(x)$ *tourne sa convexite*,

à partir d'un point déterminé M ayant x pour abscisse, *vers les* y *négatifs ou vers les* y *positifs, suivant que la seconde dérivée* f″ (x) *est positive ou négative* pour cette valeur de x.

Remarque. — On vérifie à l'aide des considérations qui précèdent la règle donnée au n° 86, pour reconnaître les maxima ou minima d'une fonction d'une variable. Si l'ordonnée d'une courbe a un maximum ou un minimum, en ce point la tangente doit être parallèle à l'axe des x, et par conséquent la première dérivée doit être nulle. S'il y a maximum, la courbe tourne sa convexité vers les y positifs, et par conséquent la seconde dérivée doit être négative. S'il y a minimum, la courbe tourne sa convexité vers les y négatifs, et par conséquent la seconde dérivée doit être positive. Mais ces considérations deviennent insuffisantes quand la seconde dérivée s'annule, et il faut recourir à la théorie exposée au numéro cité.

110. — Considérons, par exemple, la courbe qui a pour équation

$$y = \sin x,$$

et qui a la forme représentée par la figure 9. On tire de cette équation

$$y'' = -\sin x.$$

Fig. 9.

Par conséquent, on reconnait que depuis $x = 0$, qui répond à l'origine, jusqu'à $x = \pi$, qui répond au point A où la courbe rencontre de nouveau l'axe des x, $f''(x)$ est négatif et que la courbe tourne sa convexité vers les y positifs. Au contraire, depuis $x = \pi$ jusqu'à $x = 2\pi$, c'est-à-dire depuis le point A jusqu'au point B, où la courbe coupe, pour la troisième fois, l'axe des x, $f''(x)$ est positif, la courbe tourne sa convexité vers les y négatifs.

Les mêmes résultats se reproduisent périodiquement pour

les valeurs de x supérieures à 2π, ou pour les valeurs négatives de cette variable.

111. — Il peut arriver que le coefficient angulaire de la tangente, ou $f'(x)$, après avoir été croissant de $x=a-h$ à $x=a$, devienne décroissant de $x=a$ à $x=a+h$, ou *vice versa*; en d'autres termes, il peut arriver que l'abscisse $x=a$ corresponde à un maximum ou à un minimum de $f'(x)$. On sait qu'alors sa dérivée $f''(x)$ prend pour $x=a$ la valeur $f''(a)=0$, ou la valeur $f''(a)=\infty$ (85).

Les points qui présentent cette circonstance se nomment des *points d'inflexion*. Ce sont des points où la convexité de la courbe change de sens; si, par exemple, de $x=a-h$ à $x=a$, la courbe tournait sa convexité vers les y négatifs de $x=a$ à $x=a+h$, elle tourne sa convexité vers les y positifs; ou bien c'est l'inverse qui a lieu. Dans les deux cas la courbe passe d'un côté à l'autre de sa tangente, c'est-à-dire que si elle était d'abord d'un côté de la tangente de $x=a-h$ à $x=a$, elle passe de l'autre côté de $x=a$ à $x=a+h$.

Dans la courbe $y=\sin x$ (fig. 9) les points O, A, B,... sont des points d'inflexion; car pour ces points on a

$$f''(x)=-\sin x=0.$$

Nous aurons occasion de revenir sur les points d'inflexion en nous occupant d'une manière plus générale des *points singuliers*.

112. — Les notions sur la *courbure* des lignes résultent de la comparaison des arcs de courbe quelconques avec les arcs de cercle.

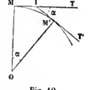


Fig. 10.

Un arc de cercle de longueur déterminée est d'autant plus courbe que l'angle aigu formé par les tangentes menées à ses extrémités est plus grand. Soit, par exemple, l'arc MM'; menons les rayons OM et OM', et les tangentes MT et M'T' qui se coupent au point . Si

l'arc MM' a une longueur déterminée, il sera d'autant plus courbe que l'angle TIT' sera plus grand. Or cet angle est égal à l'angle MOM'; on peut donc dire qu'un arc de cercle de longueur déterminée est d'autant plus courbe qu'il répond à un angle au centre plus grand; ou, ce qui revient au même, qu'il est d'autant plus courbe qu'il appartient à un cercle d'un rayon plus petit. Ainsi, *pour un arc de cercle de longueur donnée, la courbure varie en raison inverse du rayon.*

C'est ce que l'on peut voir encore d'une autre manière. On sait qu'on a

$$MM' = OM \times \text{arc}\, MOM',$$

ou en appelant s l'arc MM', α l'angle MOM' (ou l'arc qui lui sert de mesure dans le cercle dont le rayon est 1) et r la longueur OM,

$$s = r\alpha,$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{s} = \frac{1}{r}.$$

On prend l'angle α pour la mesure de la courbure de l'arc S; on voit dès lors que pour un arc de même longueur elle varie en raison inverse du rayon.

Le quotient $\frac{\alpha}{s}$ représente la *courbure par unité de longueur de l'arc s*. D'après la relation (1), elle est égale à l'inverse du rayon; et c'est dans ce sens que $\frac{1}{r}$ sert de mesure à la courbure.

113. — Pour étendre ces notions à une courbe plane quelconque, on compare les très-petits arcs de cette courbe à des

arcs de cercle. Cette comparaison peut d'abord se faire d'une manière élémentaire, comme il suit.

I. Soit AB la courbe considérée dont l'équation est

$$y = f(x).$$

Soit M un point quelconque de cette courbe, dont les coordonnées sont x et y, et soient M' et M'' deux points consécutifs très-voisins du premier. Par les trois points M, M', M'', qui ne sont point en ligne droite, on peut faire passer un cercle; soit C son centre; joignons les rayons CM et CM'. Si les points M, M', M'' sont très-rapprochés, l'arc de cercle qui les joint différera très-peu de l'arc correspondant de la courbe proposée; et si on les rapproche de plus en plus, de manière à se confondre avec le point M, l'arc de cercle tendra à se confondre avec l'arc correspondant de la courbe AB. La limite vers laquelle tend ainsi le cercle mené par les trois points consécutifs M, M', M'' est ce que l'on appelle le *cercle de courbure* de la courbe au point M; son centre est le *centre de courbure*, et son rayon prend le nom de *rayon de courbure*.

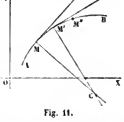


Fig. 11.

On voit que le centre de courbure relatif au point M est à la rencontre de la normale en M avec une normale M'C infiniment voisine. On voit aussi qu'à la limite les deux longueurs MC et M'C peuvent être considérées comme égales.

114. — Soit ρ le rayon de courbure CM; désignons par ds l'arc infiniment petit MM', et par $d\alpha$ l'angle infiniment petit MCM'. Cet angle, formé par les deux rayons CM, CM', est égal à l'angle formé par les deux tangentes MT, M'T', et porte, pour cette raison, le nom d'*angle de contingence*.

Puisque l'arc MM' se confond avec l'arc correspondant du cercle de courbure, on a

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho}, \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{ds}{d\alpha}.$$

Cette formule et les considérations géométriques qui précèdent peuvent d'abord servir à trouver l'expression du rayon de courbure.

Les coordonnées du point M étant x et y, celles du point M' sont

$$x + dx, \quad \text{et} \quad y + dy;$$

la distance de ces deux points, ou l'arc MM' regardé comme ayant pour limite sa corde, a donc pour valeur

$$ds = \lim . \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

ou

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}.$$

Le coefficient angulaire de MT étant y', celui de M'T' est de même $y' + dy'$; la tangente de l'angle de ces deux droites est donc donnée par la relation

$$\text{tang MCM'} = \frac{y' - (y' + dy')}{1 + y'(y' + dy')};$$

ou, en prenant l'arc pour la tangente, ce qui est permis, attendu que l'arc est infiniment petit, et, en négligeant l'infiniment petit dy' devant y',

$$d\alpha = \frac{-dy'}{1 + y'^2}.$$

Par suite

$$\rho = dx \,.\, \sqrt{1+y'^2} \cdot \frac{1+y'^2}{-\,dy'} = -\,\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(\dfrac{dy'}{dx}\right)};$$

ou enfin

(1) $$\rho = -\,\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Telle est l'expression du rayon de courbure. Elle ne donne pas pour ρ une valeur négative, attendu que, d'après la figure qui a servi à l'établir, la courbe tourne sa convexité vers les y positifs, et que dès lors y'' est négatif (109).

Si l'on fait la figure pour le cas où la courbe AB tourne sa convexité vers les y négatifs, on voit que les calculs restent les mêmes, si ce n'est que pour avoir la tangente de l'angle de MT avec MT′, il faut, en appliquant la formule connue qui donne la tangente de l'angle de deux droites, retrancher y' de $y' + dy'$, au lieu de soustraire $y' + dy'$ de y' comme tout à l'heure. On obtient alors

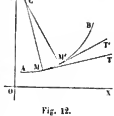


Fig. 12.

(2) $$\rho = +\,\frac{(1+y'^2)}{y''},$$

et comme y'' est alors positif, on obtient encore pour ρ une valeur positive.

II. Mais on peut établir la même formule par les considérations analytiques qui suivent.

Considérons d'abord deux courbes quelconques

$$y = f(x) \quad \text{et} \quad y = \varphi(x),$$

qui ont un point commun répondant à l'abscisse a, de telle

sorte qu'on ait $f(a) = \varphi(a)$. Si dans les équations de ces courbes on remplace x par $a + h$, h désignant une quantité infiniment petite, on aura (64) en admettant que de $x = a$ à $x = a + h$, les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ et toutes leurs dérivées conservent des valeurs finies,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\frac{h}{1} + f''(a)\frac{h^2}{1.2} + f'''(a)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

et

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + \varphi'(a)\frac{h}{1} + \varphi''(a)\frac{h^2}{1.2} + \varphi'''(a)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

Si l'on a $f'(a) = \varphi'(a)$, les deux courbes ont au point commun la même tangente, et l'on dit qu'elles ont entre elles un contact du *premier ordre*, et leurs ordonnées

$$f(a+h) \quad \text{et} \quad \varphi(a+h)$$

ne diffèrent que d'un infiniment petit du deuxième ordre.

Si l'on a en outre $f''(a), = \varphi''(a)$, on dit que les courbes ont un contact du *deuxième ordre;* et leurs ordonnées

$$f(a+h), \quad \text{et} \quad \varphi(a+h)$$

ne diffèrent que d'un infiniment petit du troisième ordre.

En général, si les n premières dérivées prennent des valeurs égales pour $x = a$, on dit que les courbes ont un contact du $n^{ième}$ *ordre*, et leurs ordonnées

$$f(a+h) \quad \text{et} \quad \varphi(a+h)$$

ne diffèrent que d'un infiniment petit de l'ordre $n + 1$.

Si l'une des courbes est algébrique et de degré n, et qu'elle ait avec l'autre courbe un contact du $n^{ième}$ ordre, on dit que la première courbe est *osculatrice* par rapport à la seconde.

Conformément à cette définition, un cercle tangent à une

courbe est dit *osculateur*, par rapport à cette courbe, s'il a avec elle un contact du deuxième ordre.

Proposons-nous de trouver le cercle osculateur à une courbe donnée $y = f(x)$ au point qui a pour coordonnées x et y. Si X et Y sont les coordonnées de son centre, et ρ son rayon, son équation sera de la forme

$$(1) \qquad (x-X)^2 + (y-Y)^2 = \rho^2.$$

On en tire, en différentiant deux fois de suite,

$$(2) \qquad (x-X) + y'(y-Y) = 0,$$

$$(3) \qquad 1 + y'^2 + y''(y-Y) = 0.$$

Pour que ce cercle soit osculateur à la courbe donnée au point x et y, il faut que y' et y'' soient les mêmes pour la courbe et pour le cercle. Dès lors l'équation (2) signifie que le centre du cercle est sur la normale au point commun; car elle exprime que les coordonnées X et Y satisfont à l'équation de la normale. Quant à l'équation (3), elle exprime que le centre du cercle est sur la normale à la courbe proposée, au point infiniment voisin qui a pour coordonnées $x + dx$ et $y + dy$; car si, dans l'équation (2), on remplace x par $x + dx$, et y par $y + dy$ pour avoir la normale au point infiniment voisin, on retombe après réductions sur l'équation (3).

Le rayon ρ se déduit aisément des trois relations ci-dessus écrites. La troisième donne

$$y - Y = -\frac{(1 + y'^2)}{y''};$$

substituant cette valeur dans la relation (2), on en déduit

$$x - X = +\frac{y'(1 + y'^2)}{y''};$$

et, par suite, la relation (1) donne

$$\rho^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}, \quad \text{d'où} \quad \rho = \pm \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

c'est la valeur obtenue pour le rayon de courbure par la première méthode.

On devra prendre le signe + ou le signe — suivant que y'' sera positif ou négatif, pour que la valeur de ρ, qui exprime une longueur absolue, soit positive. C'est-à-dire qu'il faudra prendre le signe +, ou le signe —, suivant que la convexité de la courbe sera tournée vers les y négatifs ou vers les y positifs.

Ce calcul montre l'identité du cercle osculateur avec le cercle de courbure passant par trois points consécutifs infiniment voisins, tel que nous l'avions d'abord considéré.

Nous appliquerons la formule du rayon de courbure à deux exemples.

115. — I. Nous prendrons pour premier exemple l'ellipse. De l'équation de cette courbe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{on tire d'abord} \quad y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y};$$

d'où

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{y - xy'}{y^2}\right) = -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2y^2 + b^2x^2}{a^2y^3}\right) = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Par suite,

$$(5) \qquad \rho = + \frac{\left(1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2y^3}} = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

On trouve, par exemple, que pour

$$x=0 \quad \text{et} \quad y=b, \quad \text{on a} \quad \rho=\frac{a^2}{b};$$

et que, pour

$$x=a \quad \text{et} \quad y=0, \quad \text{on a} \quad \rho=\frac{b^2}{a}.$$

Mais on peut déduire de la formule (3) une construction géométrique. Soit M le point où l'on veut déterminer le rayon de courbure; on joint ce point aux deux foyers F et F'; on mène la bissectrice MN de l'angle FMF'; c'est la normale au point M; par son pied N on lui élève une perpendiculaire NI terminée à l'un des rayons vecteurs MF'; et au point I on élève une perpendiculaire IC à ce rayon vecteur; le point C où elle coupe la normale est le centre de courbure correspondant au point M; et MC est le rayon de courbure.

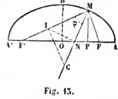


Fig. 13.

En effet, menons l'ordonnée MP. La sous-normale NP a pour valeur

$$NP=yy'=y\times-\frac{b^2x}{a^2y}=-\frac{b^2x}{a^2}.$$

La valeur de la normale MN est donc

$$MN=\sqrt{\overline{MP}^2+\overline{NP}^2}=\sqrt{y^2+\frac{b^4x^2}{a^4}}=\frac{\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}}{a^2}.$$

Soit φ l'angle NMF'; on a

$$MI=\frac{MN}{\cos\varphi}, \quad MC=\frac{MI}{\cos\varphi}, \quad \text{donc} \quad MC=\frac{MN}{\cos^2\varphi}.$$

Or l'angle φ est la différence des angles MNA et MF'A, qui ont respectivement pour tangente

$$\frac{a^2y}{b^2x}, \quad \text{et} \quad \frac{y}{x+c};$$

on a donc

$$\tang \varphi = \frac{\dfrac{a^2y}{b^2x} - \dfrac{y}{x+c}}{1 + \dfrac{a^2y^2}{b^2x(x+c)}} = \frac{a^2y\,(x+c) - b^2xy}{a^2y^2 + b^2x^2 + b^2cx}$$

$$= \frac{c^2xy + a^2cy}{a^2b^2 + b^2cx} = \frac{cy}{b^2}.$$

Par conséquent,

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \tang^2 \varphi} = \frac{b^4}{b^4 + c^2y^2} = \frac{a^2b^4}{a^4y^2 + b^4x^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de MC, on obtient

$$\text{MC} = \frac{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}}{a^2} \times \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^2b^4} = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)}{a^4b^4} = \rho,$$

ce qui justifie la construction.

Cette construction est applicable à l'hyperbole et à la parabole.

116. — II. Nous prendrons pour second exemple la cycloïde. De ses équations

$$x = \text{R}(\alpha - \sin \alpha), \quad y = \text{R}(1 - \cos \alpha),$$

on a tiré au n° 105, II,

$$y' = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

On en déduit

$$1 + y'^2 = \frac{(1 - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2} = \frac{2}{1 - \cos \alpha},$$

on trouve ensuite

$$dy' = \frac{(1-\cos\alpha)\cos\alpha - \sin\alpha\,.\,\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}\,d\alpha = -\frac{d\alpha}{1-\cos\alpha},$$

on a d'ailleurs

$$dx = \mathrm{R}\,(1-\cos\alpha)\,d\alpha.$$

Par conséquent

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{\mathrm{R}}\cdot\frac{1}{(1-\cos\alpha\ )}.$$

Substituant dans l'expression du rayon de courbure, on obtient

$$\rho = +\frac{\left(\dfrac{2}{1-\cos\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{1}{\mathrm{R}(1-\cos\alpha)^2}} = 2\mathrm{R}\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\alpha} = 4\mathrm{R}\sin\tfrac{1}{2}\,\alpha.$$

Or, si l'on se reporte à la figure du n° 103, on reconnaît que l'on a

$$\mathrm{MA} = 2\mathrm{R}\sin\tfrac{1}{2}\,\alpha.$$

Donc

$$\rho = 2\mathrm{MA},$$

c'est-à-dire que *dans la cycloïde le rayon de courbure est le double de la normale.*

§ 4. — DÉVELOPPÉES DES LIGNES PLANES

117. — On appelle *développée* d'une courbe plane le lieu géométrique de ses centres de courbure. Soit ABCDE.. une courbe plane quelconque; et soient A, B, C, D, E,... des

points très-rapprochés sur cette courbe. Menons par ces points les normales Aa, Bb, Cc, Dd, Ee;... ces normales formeront par leurs intersections successives une ligne polygonale *abc de*.... Concevons maintenant que les arcs AB, BC, CD, DE,... deviennent infiniment petits; les points a, b, c, d, e,... deviendront les centres de courbure de ces arcs (113); et la ligne polygonale *abcde*... deviendra une courbe continue, lieu de ces centres de courbure. C'est cette courbe que l'on appelle la *développée* de la courbe ABCDE,... laquelle prend le nom de *développante* par rapport à la courbe *abcde*.... Voici l'origine de ces dénominations.

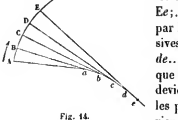


Fig. 14.

Remarquons d'abord que si les arcs AB, BC, CD, DE,... sont infiniment petits, on peut écrire (113) $aA = aB$, $bB = bC$; $cC = cD$; $dD = dE$;... Cela posé, imaginons que l'on enroule sur la courbe *abcde*... un fil flexible mais inextensible dont une extrémité aboutisse en A; puis, supposons qu'on la déroule en le tenant toujours tendu, et en faisant marcher son extrémité libre A dans le sens de la flèche, l'autre extrémité étant fixée quelque part sur la courbe *abcde*. L'extrémité A décrira d'abord un élément de cercle ayant son centre en a; cet arc de cercle passera par le point B, puisque $aA = aB$; et il se confondra avec l'élément AB de la courbe donnée, puisqu'il a pour centre le centre de courbure a de cet élément. Quand l'extrémité libre du fil sera parvenue en B, sur le prolongement de l'élément ab, le mouvement changera, et l'extrémité libre décrira un élément de cercle ayant son centre en b; cet arc de cercle passera par le point C, puisque $bB = bC$; et il se confondra avec l'élément BC de la courbe donnée, puisqu'il a pour centre le centre de courbure b de cet élément. Quand l'extrémité libre du fil sera venue en C, sur le prolongement

de l'élément bc, le mouvement changera encore ; l'extrémité libre décrira un élément de cercle ayant son centre en C ; cet arc de cercle passera par le point D, puisque $cC = cD$, et il se confondra avec l'élément CD de la courbe donnée, puisqu'il a pour centre le centre de courbure c de cet élément. En continuant ainsi, on voit que l'extrémité libre du fil décrira une série d'arcs de cercles ayant leurs centres sur *abcde*... et qui se confondront avec les éléments successifs de la courbe donnée ABCDE.... En définitive, elle décrira cette courbe d'un mouvement continu.

Ainsi, une courbe donnée quelconque ABCDE... peut toujours être considérée comme décrite par l'extrémité libre d'un fil enroulé sur la courbe *abcde*... lieu de ses centres de courbure. Dans ce mouvement le fil enroulé se *développe;* d'où les noms de *développée* et de *développante* donnés aux courbes *abcde*... et ABCDE....

Il résulte de ce mode de description que, dans toutes ses positions, le fil est normal à la courbe ABCDE,... puisqu'il est normal aux éléments de cercle avec lesquels elle se confond ; en même temps le fil est tangent à la courbe *abcde*... puisqu'il est toujours le prolongement d'un de ses éléments. On peut donc dire que *toute tangente à la développée est normale à la développante*, et réciproquement, *toute normale à la développante est tangente à la développée.*

118. — Ces considérations géométriques pourraient suffire à la rigueur pour établir les propriétés de la développée. Néanmoins, il est utile d'en donner la démonstration analytique.

On a vu au n° 114, II, que le centre de courbure répondant au point d'une courbe donnée, dont les coordonnées sont x et y, est situé sur la normale en ce point à cette courbe, et sur la normale infiniment voisine menée par le point dont les coordonnées sont $x + dx$ et $y + dy$, c'est-à-dire que le lieu des centres de courbure est le lieu des intersections successives des normales à la courbe proposée, ou, en d'autres termes, que la développée est l'enveloppe des normales à cette courbe. Or,

on a démontré, au n° 107, que l'enveloppe est tangente à chacune des enveloppées. Il est donc démontré que la développée d'une courbe est tangente à chacune des normales à cette courbe, et le point de contact est le centre de courbure répondant à chaque normale.

Cela posé, soient X, Y les coordonnées du centre de courbure répondant au point x, y de la courbe proposée, et soit ρ le rayon de courbure en ce point. On aura

$$\rho^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2.$$

Différentions les deux membres, il viendra, après avoir divisé par 2,

$$\rho d\rho = (X - x) dX + (Y - y) dY - [(X - x) dx + (Y - y) dy].$$

Mais la quantité entre crochets est nulle, attendu que le point X, Y est situé sur la normale [104 (9)]; il reste donc, en divisant par ρ

$$(1) \qquad d\rho = dX.\frac{X - x}{\rho} + dY.\frac{Y - y}{\rho}.$$

Appelons ω l'angle que la normale fait avec l'axe des x, nous aurons

$$\frac{X - x}{\rho} = \cos\omega \quad \text{et} \quad \frac{Y - y}{\rho} = \sin\omega,$$

et l'équation (1) pourra s'écrire

$$(2) \qquad d\rho = dX \cos\omega + dY \sin\omega.$$

En même temps, si dS représente l'élément de la développée, nous aurons aussi, attendu que cet élément a la direction de la normale à la courbe donnée,

$$\frac{dX}{dS} = \cos\omega \quad \text{et} \quad \frac{dY}{dS} = \sin\omega.$$

Si l'on met pour $\cos\omega$ et $\sin\omega$ ces valeurs dans la relation (2), elle devient

$$(3)\qquad d\rho = \frac{dX^2}{dS} + \frac{dY^2}{dS} = \frac{dS^2}{dS}, \quad \text{ou} \quad d\rho = dS.$$

Cette relation exprime que la longueur de l'élément de la développée est précisément égale à l'accroissement infiniment petit du rayon de courbure, ce qui justifie le mode de description de la courbe indiqué plus haut, et la dénomination de *développée* employée pour désigner le lieu des centres de courbure.

110. — C'est en considérant la développée comme l'enveloppe des normales à la courbe donnée qu'on obtient l'équation de cette développée.

Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe donnée. On a vu (102) que l'équation de la normale à cette courbe est

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

ou

$$(1)\qquad [Y - f(x)]\,f'(x) + (X - x) = 0.$$

Cette équation est l'équation commune de toutes les normales; l'abscisse x du point de contact doit y être considérée comme un paramètre variable qui particularise la normale. Pour avoir l'équation de l'enveloppe des normales il faut donc, conformément à la règle exposée au n° 107, éliminer x entre l'équation (1) et sa dérivée prise par rapport à x.

Au lieu de remplacer y et y' en fonction de x, dans l'équation de la normale, il peut être parfois plus commode d'introduire partout y; il faut alors éliminer y entre l'équation de la normale ainsi préparée, et sa dérivée prise par rapport à y, regardée comme variable indépendante.

Nous donnerons quelques exemples du calcul qui conduit à l'équation de la développée.

120. — I. Nous prendrons d'abord pour exemple la parabole $y^2 = 2px$.

L'équation de la normale est

$$Y - y = -\frac{y}{p}(X - x),$$

ou, en remplaçant x en fonction de y,

$$(1) \qquad Y - y = -\frac{y}{p}\left(X - \frac{y^2}{2p}\right),$$

ou bien

$$y^3 + 2p(p - X)y - 2p^2 Y = 0.$$

Différentiant par rapport à y, on a

$$(2) \qquad 3y^2 + 2p(p - X) = 0.$$

Il reste à éliminer y entre les équations (1) et (2). Pour cela on tire de (2)

$$2p(p - X) = -3y^2,$$

et en substituant dans (1), il vient

$$2y^3 = -2p^2 Y, \quad \text{d'où} \quad y^2 = \sqrt[3]{p^4 Y^2}.$$

Substituant dans (2) on obtient

$$(1) \qquad 3\sqrt[3]{p^4 Y^2} = 2p(X - p),$$

ou

$$Y^2 = \frac{8}{27} \cdot \frac{(X - p)^3}{p},$$

c'est l'équation de la développée. Elle a la forme représentée par la figure 15.

Nous ne nous arrêterons pas à sa discussion.

II. Nous prendrons pour second exemple l'ellipse, parce que, pour obtenir l'équation de la développée sous une forme simple, il convient de suivre une marche particulière.

L'équation de la normale est

(1) $$Y - y = \frac{a^2y}{b^2x}(X - x),$$

Fig. 15.

ou

$$Y = \frac{a^2X}{b^2}\cdot\frac{y}{x} + y - \frac{a^2y}{b^2} = \frac{a^2X}{b^2}\cdot\frac{y}{x} - \frac{c^2}{b^2}y.$$

Prenons la dérivée par rapport à x, en regardant y comme fonction de x ; nous aurons

$$0 = \frac{a^2X}{b^2}\left(\frac{xy' - y}{x^2}\right) - \frac{c^2}{b^2}y',$$

ou

$$0 = a^2X(xy' - y) - c^2x^2y'.$$

Mettant pour y' sa valeur $-\frac{b^2x}{a^2y}$, il vient

$$0 = a^2X\left(-\frac{b^2x^2}{a^2y} - y\right) + \frac{c^2x^2 . b^2x}{a^2y} = -\frac{a^2X . a^2b^2}{a^2y} + \frac{c^2b^2x^3}{a^2y},$$

d'où

$$\frac{x^3}{a^3} = \frac{aX}{c^2},$$

et par suite

$$\frac{x^2}{a^2} = \left(\frac{aX}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Or on trouverait par un calcul analogue

$$\frac{y^2}{b^2} = \left(-\frac{bY}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}};$$

il suffit pour cela de remplacer x par y, X par Y, a par b, b par a, et de changer par conséquent le signe de c^2. Ces valeurs, mises dans l'équation de l'ellipse, donnent

$$\left(\frac{aX}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(-\frac{bY}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

ou

$$(aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

Telle est l'équation de la développée de l'ellipse; cette courbe a la forme indiquée par la figure 16.

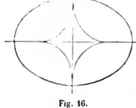


Fig. 16.

111. Nous chercherons encore la développée de la cycloïde, parce qu'elle peut s'obtenir par des considérations géométriques très-simples. Soit OHB (fig. 17) la cycloïde considérée; M l'un de ses points; C la position correspondante du centre du cercle générateur; A son point de contact avec l'axe OX. Traçons le cercle C′ symétrique du cercle C par rapport à OX; et tirons MA, qui rencontrera le cercle C′ en M′. A cause de la symétrie on aura évidemment AM′ = AM, et par conséquent MM′ = 2MA. Le point M′ sera donc (116) le centre de courbure de la cycloïde correspondant au point M.

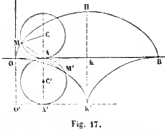


Fig. 17.

Cela posé, prenons OK = πR, et menons HKK′ parallèle à

l'axe des y; menons encore OO' parallèle à KK', et O'K' parallèle à l'axe OX, et tangent en A' au cercle C'. Nous aurons

$$O'K' = OK = \pi R, \quad \text{et} \quad O'A' = OA.$$

Or on a

$$\text{arc } AM = OA = \text{arc } AM',$$

puisque les cordes AM et AM' sont égales à cause de la symétrie. Il en résulte

$$\text{arc } A'M' = \pi R - AM' = O'K' - O'A' = A'K'.$$

Donc le point M' est sur une cycloïde OM'K' ayant pour cercle générateur le cercle C'; et qui serait engendrée par un point de la circonférence de ce cercle C' roulant sur OX en sens inverse du roulement du cercle C. Or la courbe ainsi décrite, lieu des centres de courbure M' de la cycloïde donnée, est la développée de cette cycloïde.

Donc *la développée de la cycloïde est une cycloïde égale, qui se serait abaissée parallèlement à l'axe des* y *d'une quantité égale au diamètre du cercle générateur, et qui aurait avancé ou reculé parallèlement à l'axe des* x *d'une quantité égale à une demi-circonférence de ce cercle.*

120 *bis.* — On peut remarquer que, d'après le mode de description d'une courbe fondé sur l'emploi de sa développée, il y a toujours une infinité de courbes qui ont la même développée; on les obtient en faisant varier la longueur du fil enroulé sur cette développée commune. Toutes ces courbes ont les mêmes normales; ce sont les tangentes à la commune développée; et la portion de normale comprise entre deux de ces courbes est constante dans toute leur étendue; en d'autres termes, ces courbes sont partout *équidistantes.*

Réciproquement, deux courbes qui ont toutes leurs normales communes et qui sont partout équidistantes, ont la même développée. Car si la première peut être décrite à l'aide de sa développée, en adoptant une certaine longueur de fil,

la seconde pourra être décrite à l'aide de la même développée en faisant varier la longueur du fil d'une quantité égale à la distance des deux courbes.

§ 5. — POINTS SINGULIERS DES COURBES PLANES

121. — On appelle *points singuliers* d'une courbe plane les points qui offrent quelque particularité indépendante du choix des axes.

D'après cette définition, les points où l'ordonnée est maxima ou minima ne sont pas des points singuliers, car ils perdent leur propriété quand on fait varier la direction des axes. C'est ainsi, par exemple, que le sommet du petit axe d'une ellipse, qui répond au maximum de l'ordonnée quand on rapporte la courbe à ses axes, perd cette propriété si l'on prend pour axes deux diamètres conjugués quelconques.

Nous supposerons d'abord l'équation de la courbe résolue par rapport à y.

Nous aurons à considérer les points singuliers que peut présenter une même branche de courbe; puis ceux qui résultent de la rencontre de plusieurs branches.

122. — *Points singuliers que peut présenter une même branche.*

I. *Points d'inflexion.* Nous avons déjà eu occasion de parler de ces points au n° 111; ce sont ceux où le coefficient angulaire de la tangente $f'(x)$ passe par un maximum ou par un minimum, et où par conséquent $f''(x)$ devient nul ou infini. Nous avons donné pour exemple du premier cas la sinusoïde; on peut prendre pour exemple du second cas la courbe

$$y = h + x + \frac{9}{10} x^{\frac{5}{3}}.$$

On tire de cette équation

$$y' = 1 + \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}},$$

$$y'' = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

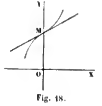


Fig. 18.

Pour $x = 0$, on trouve

$$y = h,\ y' = 1,\ y'' = \infty.$$

Le point M qui répond aux coordonnées

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = h,$$

est un point d'inflexion. Le coefficient angulaire y' est décroissant pour x négatif et croissant pour x positif; il passe donc par un minimum pour $x = 0$; la seconde dérivée y'' prend alors une valeur infinie.

On peut remarquer que quand y'' est nul, le rayon de courbure ρ (114) devient infini; et quand y'' est infini, le rayon de courbure est nul. On voit donc qu'aux points d'inflexion le rayon de courbure devient nul ou infini.

123. — II. *Points d'arrêt ou de rupture.* Ces points sont ceux où l'ordonnée passe brusquement d'une valeur finie à une valeur infinie ou à une autre valeur finie.

I. Soit, par exemple, la courbe

$$y = 1 - e^{x}.$$

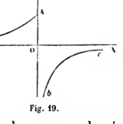


Fig. 19.

Si l'on fait varier x de $-\infty$ à 0, y est positif et augmente de 0 à 1, ce qui donne la branche aA. Si l'on fait varier x de $+\infty$ à 0, y est négatif et augmente de 0 à l'infini, ce qui donne la branche cb. Pour $x = 0$, on a donc ou une ordonnée finie $0A = 1$, ou une ordonnée négative infinie en valeur ab-

solue. Ainsi l'ordonnée passe brusquement d'une valeur finie à une valeur infinie.

II. Soit en second lieu la courbe

$$y = \text{arc.}\operatorname{tang}\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$$

Si l'on fait varier x de $-\infty$ à 0, y est négatif et varie

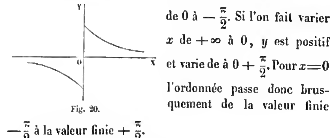


Fig. 20.

de 0 à $-\frac{\pi}{2}$. Si l'on fait varier x de $+\infty$ à 0, y est positif et varie de à $0+\frac{\pi}{2}$. Pour $x=0$ l'ordonnée passe donc brusquement de la valeur finie $-\frac{\pi}{2}$ à la valeur finie $+\frac{\pi}{2}$.

Ce genre de points singuliers ne se rencontre que dans les courbes transcendantes.

124. — III. *Points saillants.* On nomme ainsi les points où le coefficient angulaire de la tangente passe brusquement d'une valeur finie à une autre valeur finie, et où par conséquent la courbe semble se briser et former un angle dont le sommet est le point saillant.

Soit, par exemple, la courbe

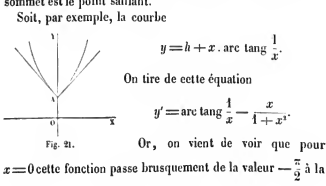


Fig. 21.

$$y = h + x\,.\,\text{arc}\operatorname{tang}\frac{1}{x}.$$

On tire de cette équation

$$y' = \text{arc}\operatorname{tang}\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$$

Or, on vient de voir que pour $x=0$ cette fonction passe brusquement de la valeur $-\frac{\pi}{2}$ à la

valeur $+\frac{\pi}{2}$. La courbe se brise donc au point A, qui devient le sommet de l'angle formé par les deux parties consécutives de la courbe; ce sommet est le point saillant.

Ce genre de points singuliers ne se rencontre également que dans les courbes transcendantes.

125. — *Points singuliers résultant de la rencontre de plusieurs branches.*

I. *Points multiples.* Ces points sont ceux où deux branches de courbe se croisent. Cela arrive lorsque y a deux valeurs distinctes qui se confondent pour une valeur particulière de x, et qu'en même temps y' conserve deux valeurs distinctes.

On peut prendre pour exemple l'équation

$$y = x\sqrt{\frac{x+a}{b}}; \quad \text{d'où} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{b}} \cdot \frac{3x+2a}{\sqrt{x+a}}.$$

Pour $x = 0$ on trouve

$$y = 0, \quad \text{et} \quad y' = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

La courbe a la forme indiquée (fig. 22); le point O est un point multiple.

Ces points se rencontrent dans les courbes dont l'équation contient des radicaux d'indice pair.

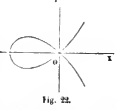


Fig. 22.

126. — Il peut arriver que les deux branches de courbe au lieu de se croiser soient tangentes. Le point de contact est alors ce qu'on appelle un *point multiple avec contact*, et il est dit *de première* ou *de deuxième espèce*, suivant que les deux branches sont situées de part et d'autre de leur tangente commune ou d'un même côté de cette tangente.

Ce qui caractérise ces points, c'est d'abord que deux valeurs distinctes de y se confondent en une seule ; que deux valeurs de y' se confondent également en une seule ; et le point est de première ou de deuxième espèce, suivant que sur les deux branches y'' a des signes différents ou le même signe.

Comme exemple d'un *point multiple avec contact de première espèce*, on peut prendre la courbe (fig. 23)

$$y = x^2\sqrt{1+x}.$$

On a dans ce cas

$$y' = \frac{4x+5x^2}{2\sqrt{1+x}}; \qquad y'' = \frac{8+24x+15x^2}{16(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour $x=0$, on trouve

$$y=0,\quad y'=0,\quad \text{et}\quad y''=\pm\frac{1}{2}.$$

Les deux valeurs de l'ordonnée se réduisent à une seule ; il en est de même des deux valeurs de y' ; quant aux deux valeurs de y'', elles restent distinctes et de signe différent ; le point O est donc un point multiple avec contact de première espèce.

Fig. 23.

Comme exemple d'un point multiple avec contact de deuxième espèce, nous prendrons la courbe (fig. 24),

$$y = x^2 + \frac{1}{2}x^2\sqrt{1+x}.$$

On a dans ce cas

$$y' = 2x + \frac{4x+5x^2}{4\sqrt{1+x}}, \qquad y'' = 2 + \frac{8+24x+15x}{8(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour $x=0$, on trouve

$$y=0,\ y'=0,\ y''=2\pm1\,;$$

les deux valeurs de y se réduisent encore à une seule, il en est de même des valeurs de y'; mais les deux valeurs de y'' restent distinctes et ont toutes deux le même signe. Le point O est donc bien un point multiple avec contact de deuxième espèce.

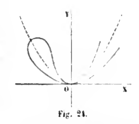


Fig. 24.

127. — II. *Points de rebroussement*. Ce qui caractérise ces points, c'est que l'ordonnée est imaginaire, soit en deçà, soit au delà; qu'elle a deux valeurs distinctes, soit au delà, soit en deçà, qui se confondent en une seule au point considéré, et que le coefficient angulaire y' a aussi deux valeurs distinctes qui se confondent en une seule en ce point. La courbe présente donc au point de rebroussement deux branches tangentes entre elles, mais qui ne s'étendent que d'un côté de ce point. Le point de rebroussement est dit *de première* ou *de deuxième* espèce, suivant que les deux branches sont situées de part et d'autre de leur tangente commune ou d'un même côté de cette tangente, ce qu'indique le signe de y''.

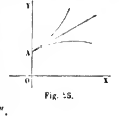


Fig. 25.

Soit (fig. 25) l'équation

$$y=h+x+\frac{4}{15}\,x^{\frac{5}{2}},$$

on en tire

$$y'=1+\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}},\quad \text{et}\quad y''=\sqrt{x}.$$

Pour $x=0$ on a $y=h$, $y'=1$; d'ailleurs y devient imaginaire (ainsi que y') pour les valeurs négatives de x. De

plus y'' a un signe différent sur les deux branches. On a donc au point A un *point de rebroussement de première espèce*.

Soit au contraire (fig. 26) l'équation

$$y = h + \frac{1}{2}x + x^2 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}},$$

on en tire

$$y' = \frac{1}{2} + x + x^{\frac{3}{2}}, \quad \text{et} \quad y'' = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

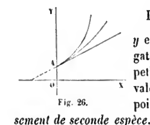


Fig. 26.

Pour $x=0$, on a $y=h$, $y'=\frac{1}{2}$; et y est imaginaire pour les valeurs négatives de x. De plus, pour de très-petites valeurs positives de x, les deux valeurs de y'' sont de même signe. Le point A est donc un *point de rebroussement de seconde espèce*.

128. — III. *Points conjugués* (ou isolés). Ces points proviennent ordinairement d'une branche de courbe fermée qui se réduit à un point pour une valeur particulière d'un paramètre entrant dans l'équation de la courbe. Ils sont caractérisés par cette circonstance que, en deçà et au delà, l'ordonnée est imaginaire, jusqu'à une valeur convenable de x; et qu'au point lui-même y' est imaginaire.

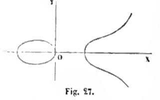


Fig. 27.

Soit, par exemple, la courbe

$$y = \frac{\sqrt{x(x+a)(x-b)}}{m},$$

qui a la forme représentée par la figure 27.

Si l'on fait l'hypothèse $a=0$, l'équation devient

$$y=\frac{x\sqrt{x-b}}{m},\quad \text{d'où}\quad y'=\frac{3x-2b}{2m\sqrt{x-b}}.$$

Pour $x=0$ on a $y=0$. Mais pour des valeurs positives de x moindres que b, ou pour des valeurs négatives de cette variable, y est imaginaire. Au point O lui-même (fig. 28), y' est imaginaire. Ce point est donc un *point conjugué*.

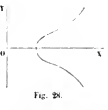


Fig. 28.

129. — Supposons maintenant que l'équation ne puisse pas être résolue par rapport à y; soit $f(x, y) = 0$ cette équation.

Rappelons-nous qu'on en déduit par la différentiation (30, 59)

$$(a)\qquad \frac{df}{dx}+y'\frac{df}{dy}=0,$$

$$(b)\qquad \left(\frac{d^2f}{dx^2}+2y'\frac{d^2f}{dx\,dy}+y'^2\frac{d^2f}{dy^2}\right)+y''\frac{df}{dy}=0,$$

$$(c)\qquad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{d^3f}{dx^3}+3y'\frac{d^3f}{dx^2dy}+3y'^2\frac{d^3f}{dx\,dy^2}+\frac{d^3f}{dy^3}\right)\\ &\quad+3y''\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}+y'\frac{d^2f}{dy^2}\right)+y'''\frac{df}{dy}=0,\end{aligned}\right.$$

. . . .

L'équation (a) donne y'; en substituant cette valeur dans l'équation (b), on en tire y''; et, en substituant les valeurs de y' et de y'' dans l'équation (c), on en tirerait y'''; et ainsi de suite.

Il n'y a rien de particulier à remarquer pour les points singuliers que peut présenter une même branche de courbe.

Mais il peut arriver qu'au point que l'on considère on ait à la fois

$$\frac{df}{dx}=0, \quad \text{et} \quad \frac{df}{dy}=0;$$

Dans ce cas, l'équation (a) qui donnait y' devient illusoire, et c'est alors l'équation (b) qui donne cette première dérivée, attendu que le terme en y'' disparaît, puisque $\frac{df}{dy}=0$, c'est-à-dire qu'alors y' est donné par une équation du second degré.

Si les racines sont imaginaires, on a affaire à un point conjugué.

Si les racines sont réelles et inégales, c'est un point multiple ordinaire.

Si les racines sont égales, il s'agit d'un point multiple avec contact, ou d'un point de rebroussement. Si y conserve une valeur réelle en deçà et au delà du point considéré, c'est un point multiple; si y devient imaginaire en deçà ou au delà, c'est un point de rebroussement.

Dans les deux cas, l'*espèce* du point sera donnée par y'', que l'on tirera alors de l'équation (c), attendu que y''' disparaît, puisque $\frac{df}{dy}$ est nul. Si les deux valeurs de y'' sont de signe contraire, on aura affaire à un point multiple de première espèce ou à un point de rebroussement de première espèce; si les deux valeurs de y'' sont de même signe, ce sera un point multiple de deuxième espèce ou un point de rebroussement de deuxième espèce.

Les détails qui précèdent suffisent pour les besoins de l'application.

§ 6. — COURBES A DOUBLE COURBURE

130. — Une courbe quelconque, dans l'espace, est représentée, en coordonnées rectangulaires, par deux équations

entre les trois variables x, y, z. Ces deux équations sont celles de deux surfaces dont l'intersection est la courbe considérée. Le plus souvent les deux équations ne renferment chacune que deux variables et se présentent sous la forme

$$(1) \qquad x = \varphi(z), \qquad y = \psi(z),$$

elles représentent alors les cylindres qui projettent la courbe sur le plan des xz, et sur le plan des yz.

On prend ordinairement z pour variable indépendante ; cependant, pour la symétrie des formules, il est souvent commode de regarder x, y et z comme fonctions d'une variable indépendante auxiliaire ; on adopte alors généralement pour variable indépendante l'arc s de la courbe ; x, y, z sont considérés comme fonctions de s.

131. — *Expression d'un élément de la courbe.* Soient x, y, z les coordonnées d'un point M de la courbe, et soient

$$x + \Delta x, \; y + \Delta y, \; z + \Delta z,$$

les coordonnées d'un point voisin M'. Si l représente la droite qui joint les points M et M', on aura, d'après une formule connue de Géométrie analytique à trois dimensions

$$l = \sqrt{\overline{\Delta x}^2 + \overline{\Delta y}^2 + \overline{\Delta z}^2}.$$

Si l'on rapproche indéfiniment le point M' du point M, la corde l de l'arc MM' tendra vers l'arc lui-même, que l'on représente par ds, en même temps que Δx, Δy, Δz tendront respectivement vers dx, dy, dz. On aura donc

$$ds = \lim . \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

ou

$$(2) \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

L'arc infiniment petit ds est ce qu'on nomme un *élément* de la courbe.

Si l'on prend z pour variable indépendante, on peut écrire

$$ds = dz\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1},$$

ou, en tirant $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ des équations (1) de la courbe

$$(3) \qquad ds = \sqrt{[\varphi'(z)]^2 + [\psi'(z)]^2 + 1}.$$

132. — *Tangente.* Les équations de la droite qui joint les points M, M′ ayant pour coordonnées

$$x,\ y,\ z, \quad \text{et} \quad x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z,$$

sont, en désignant par X, Y, Z les coordonnées courantes,

$$X - x = \frac{\Delta x}{\Delta z}(Z - z), \quad \text{et} \quad Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta z}(Z - z).$$

Si l'on fait tendre M′ vers M, la sécante MM′ tendra vers la tangente en M; en même temps

$$\frac{\Delta x}{\Delta z} \text{ et } \frac{\Delta y}{\Delta z}, \text{ tendront vers } \frac{dx}{dz} \text{ et } \frac{dy}{dz};$$

les équations de la tangente sont donc

$$(4) \quad X - x = \frac{dx}{dz}(Z - z), \quad \text{et} \quad Y - y = \frac{dy}{dz}(Z - z).$$

On peut les écrire symétriquement sous la forme

$$(5) \qquad \frac{dx}{X - x} = \frac{dy}{Y - y} = \frac{dz}{Z - z}.$$

On remarquera que les équations (4) sont celles des tangentes aux courbes représentées par les équations (1); ainsi *la projection de la tangente à une courbe est tangente à la projection de cette courbe*, ce qu'il était aisé de prévoir.

Considérons les points de la courbe et de sa tangente qui correspondent à l'ordonnée $z+h$, h étant une quantité infiniment petite. Soient x_1, y_1, $z+h$ les coordonnées du premier de ces points, que nous appellerons p; et X_1, Y_1, $z+h$, celles du second, que nous appellerons P. D'après ce qui a été expliqué au n° 99, la différence $X_1 - x_1$ sera un infiniment petit du second ordre, si la courbe n'éprouve pas de discontinuité au point que l'on considère; et il en sera de même de la différence $Y_1 - y_1$. On en conclut aisément que la distance des points P et p est elle-même un infiniment petit du second ordre, car cette distance δ a pour expression

$$\delta = \sqrt{(X_1 - x_1)^2 + (Y_1 - y_1)^2 + 0}.$$

Or, d'après ce qu'on vient de dire, h étant l'infiniment petit principal, les différences $X_1 - x_1$, et $Y_1 - y_1$, sont de la forme kh^2 et $k'h^2$, k et k' étant des coefficients finis. On a donc

$$\delta = h^2\sqrt{k^2 + k'^2},$$

quantité infiniment petite du second ordre.

On ferait voir, comme au n° 99, que la tangente au point x, y, z ne passe pas par le point $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, et que si ces dernières coordonnées paraissent satisfaire aux équations de la tangente, c'est parce qu'on néglige les infiniment petits du second ordre.

132 *bis*. — On sait que si $x = az + p$, $y = bz + q$, sont les équations d'une droite, les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes ont respectivement pour valeur

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

Si l'on applique ces formules à la tangente, on aura donc, en désignant par α, β, γ les angles qu'elle fait avec les axes des x, des y et des z,

$$(6)\ \cos\alpha = \frac{\frac{dx}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \frac{dx}{ds}$$

et de même

$$\cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \text{et} \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

133. — *Plan normal.* Toutes les perpendiculaires à la tangente menées par le point de contact sont des *normales;* le lieu de ces normales est un plan perpendiculaire à la tangente et auquel on donne le nom de *plan normal.*

Ce plan, passant par le point de contact dont les coordonnées sont x, y, z, son équation est de la forme

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0.$$

Pour qu'il soit perpendiculaire à la droite, représentée par les équations (4), il faut qu'on ait

$$A = C.\frac{dx}{dz}, \quad \text{et} \quad B = C.\frac{dy}{dz}.$$

Substituant dans l'équation précédente ces valeurs de A et de B, et supprimant le facteur C devenu commun, on obtient

$$(7) \qquad (X-x)\frac{dx}{dz} + (Y-y)\frac{dy}{dz} + (Z-z) = 0,$$

ou

$$(X-x)\,dx + (Y-y)\,dy + (Z-z)\,dz = 0,$$

c'est l'équation du plan normal.

134. — *Plans tangents.* Tout plan mené suivant la tangente porte le nom de *plan tangent.* L'équation générale des plans tangents est évidemment de la forme

$$(8)\ [(X-x)\,dz-(Z-z)\,dx]+\lambda[(Y-y)\,dz-(Z-z)\,dy]=0,$$

car cette équation représente un plan, et ce plan contient la tangente, puisque l'équation (8) est satisfaite en même temps que les équations (4) de la tangente.

Nous remarquerons encore ici que ce plan, qui passe par le point x, y, z, ne passe pas par le point dont les coordonnées sont $x + dx, y + dy, z + dz$, et que si ces coordonnées paraissent satisfaire à l'équation (8), c'est parce qu'on néglige les infiniment petits du second ordre.

135. — *Plan osculateur.* I. Considérons trois points consécutifs M, M′, M″ sur la courbe; par ces trois points, qui ne sont pas généralement en ligne droite, on pourra faire passer un plan. Si l'on fait tendre les points M′ et M″ vers le point M, ce plan tendra vers une position limite; le plan qui occupe cette position limite est ce que l'on appelle le *plan osculateur* au point M.

Ce plan devant passer par le point M, dont les coordonnées sont x, y, z, son équation est de la forme

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0.$$

Nous supposons x, y, et z fonctions d'une variable auxiliaire indépendante.

Si $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sont les coordonnées du point M′, elles doivent satisfaire à l'équation du plan, ce qui donne

$$A dx + B dy + C dz = 0.$$

Les coordonnées du point M″ étant

$$x + dx + d^2x,\ y + dy + d^2y,\ z + dz + d^2z,$$

elles doivent également satisfaire à l'équation du plan, ce qui donne, en ayant égard à la relation ci-dessus,

$$A d^2x + B d^2y + C d^2z = 0.$$

De ces deux dernières équations on tirera les rapports

$\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$; et, en substituant pour A et B leurs valeurs en C dans l'équation du plan, et supprimant le facteur C devenu commun, on obtiendra

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} (X-x)\,(dy\,d^2z - dz\,d^2x) + (Y-y)\,(dz\,d^2x - dx\,d^2z) \\ \qquad + (Z-z)\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0, \end{array} \right.$$

c'est l'équation du plan osculateur.

On en ferait disparaître les infiniment petits en divisant par ds^3, si s est la variable indépendante. Si $x', x'', y', y'', z', z''$ représentent les premières et secondes dérivées de x, y et z par rapport à s, on pourrait écrire

$$\begin{array}{l} (X-x)\,(y'z''-z'y'') + (Y-y)\,(z'x''-x'z'') \\ \qquad + (Z-z)\,(x'y''-y'x'') = 0, \end{array}$$

équation qui ne renferme plus d'infiniment petits.

II. Le plan osculateur contient la tangente en M; car si l'on remplace $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ par dx, dy, dz qui leur sont proportionnels en vertu des équations (5) de la tangente, tous les termes de l'équation (9) s'entre-détruisent. Le plan osculateur est donc compris parmi les plans tangents.

III. Si l'on prend z pour variable indépendante, il en résulte $dz =$ constante et $d^2z = 0$. L'équation du plan osculateur devient alors, en divisant par dz^3 :

$$(9\,bis) \quad \left\{ \begin{array}{l} -(X-x)\dfrac{d^2y}{dz^2} + (Y-y)\dfrac{d^2x}{dz^2} \\ + (Z-z)\left(\dfrac{dx}{dz}\cdot\dfrac{d^2y}{dz^2} - \dfrac{dy}{dz}\cdot\dfrac{d^2x}{dz^2}\right) = 0. \end{array} \right.$$

Sous cette forme, on reconnaît aisément que le plan osculateur au point M, dont les coordonnées sont x, y, z, est parallèle à la tangente au point M′ ayant pour coordonnées $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$. En effet : $\frac{dx}{dy}$ et $\frac{dy}{dz}$ étant les coeffi-

cients angulaires de la tangente en M, ceux de la tangente en M′ s'obtiendront en y changeant x en $x+dx$ et y en $y+dy$, ce qui donne

$$\frac{dx}{dz}+\frac{d^2x}{dz^2}dz \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dz}+\frac{d^2y}{dz^2}dz.$$

Or, on sait que pour qu'une droite, ayant pour coefficients angulaires a et b, soit parallèle au plan qui a pour équation

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

il faut et il suffit qu'on ait

$$Aa+Bb+C=0.$$

Dans le cas qui nous occupe, cette condition devient

$$-\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dx}{dz}+\frac{d^2x}{dz^2}dz\right)+\frac{d^2x}{dz^2}\left(\frac{dy}{dz}+\frac{d^2y}{dz^2}dz\right)$$
$$+\left(\frac{dx}{dz}\cdot\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\cdot\frac{d^2x}{dz^2}\right)=0,$$

égalité qui est en effet satisfaite d'elle-même, attendu que les termes du premier membre s'entre-détruisent.

IV. On déduit encore de ce qui précède que la plus courte distance des tangentes menées en M et en M′ est un infiniment petit du 3ᵉ ordre. En effet : cette distance n'est autre chose que la distance du plan osculateur à la tangente en M′ qui lui est parallèle. Il faut donc démontrer que celle-ci est un infiniment petit du 3ᵉ ordre. On simplifie la démonstration en prenant la tangente en M pour axe des z, le point M pour origine, et le plan osculateur en ce point pour plan des zx. L'équation (9 *bis*) du plan osculateur se réduit alors à

$$-X\frac{d^2y}{dz^2}+Y\frac{d^2x}{dz^2}=0,$$

car on a $x=0$, $y=0$, $z=0$, puisque l'origine est en M, et

$\frac{dx}{dz}=0$ avec $\frac{dy}{dz}=0$, puisque l'axe des z est une tangente. Pour que le plan osculateur se confonde avec le plan des zx, et que son équation se réduise à $Y=0$, il faut donc qu'on ait $\frac{d^2y}{dz^2}=0$.

Cela posé, soit $y=\psi(z)$ l'équation de la projection de la courbe sur le plan des yz; on aura par la série de Maclaurin (69)

$$y=\psi(0)+\psi'(0)\frac{z}{1}+\psi''(0)\frac{z^2}{1.2}+\psi'''(0)\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots$$

Mais $\psi(0)$ est nul, puisque la courbe passe par l'origine; $\psi'(0)$ est nul, puisqu'elle est tangente à l'axe des z; enfin, la condition $\frac{d^2y}{dz^2}=0$ revient à $\psi''(0)=0$. Il reste donc

$$y=\psi'''(0).\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots.$$

Donc si z est un infiniment petit du premier ordre, comme cela doit avoir lieu pour le point M′ infiniment voisin du point M, l'ordonnée y, qui mesure la plus courte distance du plan osculateur à la tangente en M′, est un infiniment petit du 3ᵉ ordre.

Il en résulte qu'en négligeant les infiniment petits du 3ᵉ ordre, on peut regarder le plan osculateur en M comme contenant les tangentes en M et M′.

135 bis. — *Normale principale.* On donne le nom de normale principale à la perpendiculaire à la tangente qui se trouve dans le plan osculateur. C'est l'intersection du plan osculateur avec le plan normal; et l'on pourrait obtenir ses équations par cette considération. Mais il est préférable d'employer la méthode suivante, qui conduit aisément à diverses autres conséquences utiles.

Soient M et M′ deux points infiniment voisins sur la courbe; MT et M′T′ les tangentes en ces deux points. La distance de la

tangente M'T' au plan osculateur mené en M étant un infiniment petit du 3ᵉ ordre, on peut, en négligeant les infiniment petits de cet ordre, regarder M'T' comme contenu dans le plan osculateur. Supposons que ce soit le plan de la figure. Soit C le centre de courbure en M de l'arc MM' considéré ainsi comme plan; menons CM et CM'; la droite MC, normale en M (113), sera la normale principale. Par l'origine des coordonnées, menons les droites Ot et Ot' parallèles à MT et à M'T'

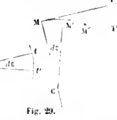


Fig. 29.

et égales à l'unité, et joignons tt'. Le triangle MCM' peut être considéré comme un triangle rectiligne isocèle, dont l'angle en C est égal à l'angle de contingence, que nous représenterons par $d\varepsilon$, et dont les angles à la base sont aussi voisins qu'on le voudra de 90°. Or, le triangle tOt' est aussi un triangle isocèle, dont l'angle en O est égal à l'angle de contingence; il est donc semblable au triangle MCM'; et, puisque Ot et Ot' sont respectivement perpendiculaires aux normales MC et M'C', il faut que le troisième côté tt' soit perpendiculaire à MM', et par conséquent aussi voisin qu'on le voudra d'être parallèle à MC. La direction de la normale principale MC est donc en définitive celle de la droite tt', et tout se réduit à trouver cette dernière.

Pour cela, soient ξ, η, ζ les coordonnées du point t; $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$ seront celles du point t'. La distance $d\sigma$ de ces deux points sera exprimée (131) par

$$d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2};$$

et si λ, μ, ν désignent les angles que tt' fait avec les axes, on aura (132)

$$\cos\lambda = \frac{d\xi}{d\sigma}, \quad \cos\mu = \frac{d\eta}{d\sigma}, \quad \cos\nu = \frac{d\zeta}{d\sigma}.$$

Or, α, β, γ désignant les angles de la tangente MT ou de la parallèle Ot avec les axes, on a

$$\xi = Ot \cdot \cos\alpha, \quad \eta = Ot \cdot \cos\beta, \quad \zeta = Ot \cdot \cos\gamma,$$

ou simplement, puisque $Ot = 1$,

$$\xi = \cos\alpha, \quad \eta = \cos\beta, \quad \zeta = \cos\gamma.$$

Mais on a trouvé au n° 132

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

On a donc

$$\xi = \frac{dx}{ds}, \quad \eta = \frac{dy}{ds}, \quad \zeta = \frac{dz}{ds},$$

et, par suite,

$$d\xi = d\,.\frac{dx}{ds}, \quad d\eta = d\,.\frac{dy}{ds}, \quad d\zeta = d\,.\frac{dz}{ds}.$$

Il est commode de prendre s pour variable indépendante ; on peut écrire alors

$$d\xi = \frac{d^2x}{ds^2}ds, \quad d\eta = \frac{d^2y}{ds^2}ds, \quad d\zeta = \frac{d^2z}{ds^2}ds.$$

La valeur de $d\sigma$ devient alors

$$d\sigma = ds\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2},$$

et l'on trouve enfin, pour les angles λ, μ, ν, les valeurs

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{\dfrac{d^2x}{ds^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}, \\ \cos\mu &= \frac{\dfrac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}, \\ \cos\nu &= \frac{\dfrac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}. \end{aligned} \right.$$

La direction de la normale principale se trouve ainsi déterminée.

136. — *Rayon de courbure.* L'arc $d\sigma$ mesure l'angle tOt' dans le cercle dont le rayon est 1 ; c'est donc la mesure de l'angle de contingence MCM'. On a donc, en désignant par ρ le rayon de courbure MC du cercle osculateur en M (114),

$$(10)\quad \frac{d\sigma}{ds}=\frac{1}{\rho}, \text{ d'où } \rho=\frac{ds}{d\sigma}=\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}.$$

Remarque I. On remarquera qu'à l'aide de cette valeur on peut écrire les valeurs des cosinus des angles λ, μ, ν de la normale principale avec les axes sous la forme

$$(11)\quad \cos\lambda=\rho\frac{d^2x}{ds^2},\quad \cos\mu=\rho\frac{d^2y}{ds^2},\quad \cos\nu=\rho\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Remarque II. On peut observer aussi que les formules qui précèdent sont applicables aux lignes planes; il n'y a de dif-

férence qu'en ce que, dans ce cas, les résultats du calcul sont généralement plus simples.

137. — *Seconde courbure.* Deux plans osculateurs consécutifs font entre eux un angle dièdre infiniment petit, que nous désignerons par $d\theta$, et que l'on appelle l'angle de *torsion* ou de *seconde courbure.* On assimile cette seconde courbure à la courbure d'un cercle, et l'on nomme *rayon de seconde courbure* le rayon d'un cercle dont la courbure serait équivalente à la torsion de la courbe considérée. Si ρ_1 désigne ce rayon de courbure, on pose par analogie

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{\rho_1},\quad \text{d'où}\quad \rho_1=\frac{ds}{d\theta}.$$

Pour obtenir l'angle $d\theta$, il faudrait, dans l'équation du plan osculateur, changer x, y, z en $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, et chercher l'angle des deux plans ainsi obtenus. Cet angle, que nous désignerons par $d\tau$, est l'angle de torsion correspondant à l'arc ds; la torsion par unité de longueur de la courbe est donc, au point considéré, $\frac{d\tau}{ds}$; et son inverse $\frac{ds}{d\tau}$ est le *rayon de torsion* ou rayon de seconde courbure.

On peut encore suivre une autre méthode et employer des considérations analogues à celles qui nous ont servi aux n°s 135 et 136. Nous renverrons pour cette question, qui a peu d'utilité dans la pratique, à des traités plus étendus.

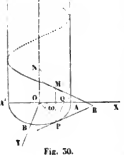


Fig. 30.

138. — *Application à l'hélice.* Nous supposerons que l'on prenne pour axe des z l'axe de l'hélice, et que l'on fasse passer l'axe des x par un point A pris sur la courbe. Soit ABA' la trace sur le plan des xy du cylindre sur lequel l'hélice est tracée ; soit

r son rayon. Soit h le pas de l'hélice ; nous poserons

$$\frac{h}{2\pi r} = \operatorname{tang} i.$$

Soient $x = OQ$, $y = PQ$, $z = MP$ les coordonnées d'un point de la courbe, et soit ω l'angle que le rayon OP fait avec OX. Les équations de l'hélice seront

$$(12) \qquad x = r\cos\omega, \quad y = r\sin\omega, \quad z = \frac{h}{2\pi}\omega = r\operatorname{tang} i\,.\,\omega.$$

On en tire

$$dx = -r\sin\omega\, d\omega, \quad y = +r\cos\omega\, d\omega, \quad dz = r\operatorname{tang} i\,.\,d\omega,$$

ou

$$dx = -y\, d\omega, \quad dy = +x\, d\omega, \quad dz = r\operatorname{tang} i\,.\,d\omega.$$

Par suite

$$ds = d\omega\sqrt{r^2 + r^2\operatorname{tang}^2 i} = \frac{r\, d\omega}{\cos i}.$$

Les équations de la tangente sont, en supprimant le facteur $d\omega$,

$$(13) \qquad \frac{-y}{X-x} = \frac{x}{Y-y} = \frac{r\operatorname{tang} i}{Z-z}.$$

On voit, en premier lieu, que la projection de la tangente sur le plan XOY a pour équation

$$(X-x)\,x + (Y-y)\,y = 0$$

ou

$$Xx + Yy = r^2;$$

c'est l'équation de la tangente PR au cercle de base, menée par le pied P de l'ordonnée du point de contact. On démontre cette propriété dans les Éléments.

On voit, en second lieu, que le cosinus de l'angle que la tangente fait avec l'axe OZ de l'hélice, c'est-à-dire $\frac{dz}{ds}$, a pour valeur le quotient de $r \operatorname{tang} i$ par $\frac{r}{\cos i}$, c'est-à-dire $\sin i$, quantité constante. C'est encore une propriété connue.

Si l'on fait $Z=0$ dans les équations de la tangente, on trouve

$$X-x=\frac{yz}{r \operatorname{tang} i}, \quad Y-y=-\frac{xz}{r \operatorname{tang} i},$$

X et Y désignant alors les coordonnées du point R où la tangente perce le plan XOY.

On a donc

$$PR=\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2}=\frac{z}{\operatorname{tang} i}=r\omega;$$

c'est-à-dire que la distance PR est égale à l'arc AP ; cette propriété se démontre aussi dans les Éléments.

Des valeurs trouvées plus haut pour dx, dy, dz, ds, on tire

$$\frac{dx}{ds}=-\frac{y\cos i}{r}, \quad \frac{dy}{ds}=+\frac{x\cos i}{r}, \quad \frac{dz}{ds}=\sin i;$$

on en déduit

$$\frac{d^2x}{ds^2}=-\frac{\cos i}{r}\cdot\frac{dy}{ds}=-\frac{\cos^2 i}{r^2}\cdot x;$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}=\frac{\cos i}{r}\cdot\frac{dx}{ds}=-\frac{\cos^2 i}{r^2}\,y;$$

$$\frac{d^2z}{ds^2}=0.$$

Cette dernière relation montre que la normale principale a une direction perpendiculaire à l'axe des z ; car elle revient

à $\cos\nu = 0$. Les deux premières donnent

$$\cos\lambda = -\frac{\frac{\cos^2 i}{r^2}x}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2 i}{r^2}x\right)^2 + \left(\frac{\cos^2 i}{r^2}y\right)^2}} = -\frac{x}{r} = -\cos\omega$$

et

$$\cos\mu = -\frac{\frac{\cos^2 i}{r^2}y}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2 i}{r^2}x\right)^2 + \left(\frac{\cos^2 i}{r^2}y\right)^2}} = -\frac{y}{r} = -\sin\omega\ ;$$

ce qui montre que la projection de la normale principale sur le plan des xy coïncide avec le rayon OP. La normale principale MN rencontre donc l'axe de l'hélice et lui est perpendiculaire.

Le plan osculateur se trouve dès lors déterminé par la tangente MR et par la normale principale MN ; il fait donc un angle constant avec cet axe.

Enfin, le rayon de courbure est donné par la formule

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 i}{r^2}.r} = \frac{r}{\cos^2 i}\ ;$$

c'est une quantité constante. Il est facile d'en déduire que le lieu des centres de courbure est une hélice de même pas que la proposée, mais tracée sur un cylindre de même axe ayant pour rayon $\rho - r$ ou $r\,\text{tang}^2 i$.

Dans l'hélice, l'angle de torsion et le rayon de seconde courbure peuvent s'obtenir directement comme il suit. Soient M et M' deux points infiniment voisins sur la courbe. Concevons que par l'origine des coordonnées on mène deux droites respectivement perpendiculaires aux plans osculateurs en M et en M' ; ces perpendiculaires feront avec l'axe de l'hélice des an-

gles égaux à i; et détermineront avec cet axe un angle trièdre dans lequel l'angle dièdre qui a pour arête OZ sera exprimé par $d\omega$. L'angle des deux perpendiculaires sera d'ailleurs $d\tau$. Si, dans la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

on fait

$$a = d\tau, \quad b = c = i \quad \text{et} \quad A = d\omega,$$

on trouve

$$\cos d\tau = \cos^2 i + \sin^2 i \,.\, \cos d\omega,$$

ou, attendu que $d\tau$ et $d\omega$ sont infiniment petits,

$$1 - \frac{d\tau^2}{2} = \cos^2 i + \sin^2 i \left(1 - \frac{d\omega^2}{2}\right),$$

relation qui se réduit à

$$\frac{d\tau^2}{2} = \sin^2 i \,.\, \frac{d\omega^2}{2};$$

d'où

$$d\tau = \sin i \,.\, d\omega.$$

Or

$$d\omega = \frac{ds \,.\, \cos i}{r};$$

il vient donc

$$d\tau = \frac{\sin i \cos i \, ds}{r},$$

d'où

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\sin i \cos i}{r} \quad \text{et} \quad \frac{ds}{d\tau} = \rho_1 = \frac{r}{\sin i \cos i},$$

en appelant ρ_1 le rayon de seconde courbure.

§ 7. — SURFACES COURBES. — NOTIONS SUR LA COURBURE.

139. — *Plan tangent.* On sait qu'une surface, quand on la rapporte à des coordonnées rectangulaires, est représentée par une équation entre ces coordonnées.

Soit

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface considérée. Si par le point M, dont les coordonnées sont x, y, z, on fait passer une courbe tracée sur la surface, courbe qui sera en général à double courbure, les équations de la tangente en M à cette courbe seront (132)

$$(2) \qquad \frac{dx}{X-x} = \frac{dy}{Y-y} = \frac{dz}{Z-z}.$$

Mais, la courbe étant tracée sur la surface, les dx, dy, dz, doivent satisfaire à la relation qu'on obtient en différentiant l'équation (1), savoir (33)

$$(3) \qquad \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0.$$

Si, dans cette dernière relation, on remplace dx, dy, dz par les quantités $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ qui leur sont proportionnelles en vertu des équations (2), on trouve

$$(4) \qquad \frac{df}{dx}(X-x) + \frac{df}{dy}(Y-y) + \frac{df}{dz}(Z-z) = 0.$$

Cette relation entre les coordonnées courantes X, Y, Z de la tangente demeure la même pour toutes les tangentes que l'on peut mener à des courbes tracées sur la surface et passant par le point M. Elle représente donc le *lieu* de ces tangentes. Or, l'équation (4) étant du premier degré en X, Y, Z, représente un plan ; il en résulte ce théorème : *toutes les tangentes*

menées par un même point d'une surface aux différentes courbes que l'on peut faire passer par ce point sur la surface, sont dans un même plan. En raison de cette propriété, on donne à ce plan le nom de *plan tangent*. Son équation est facile à former quand on a l'équation de la surface.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de l'ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

On trouvera

$$\frac{df}{dx}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{df}{dy}=\frac{2y}{b^2},\quad \frac{df}{dz}=\frac{2z}{c^2}$$

et l'équation du plan tangent sera, en supprimant le facteur 2,

$$\frac{(X-x)x}{a^2}+\frac{(Y-y)y}{b^2}+\frac{(Z-z)z}{c^2}=0,$$

équation que l'on peut écrire

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}=1.$$

Dans le cas de la sphère, on a

$$a=b=c=R;$$

l'équation du plan tangent devient donc

$$Xx+Yy+Zz=R^2,$$

et il est facile de vérifier qu'il est perpendiculaire au rayon dont les équations sont

$$X=\frac{x}{z}Z \quad \text{et} \quad Y=\frac{y}{z}Z.$$

Les angles que le plan tangent fait avec les plans coordonnés des zy, des zx et des zy ont respectivement pour cosinus

$$\frac{\frac{df}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{df}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{df}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}}.$$

(Voy. les traités de Géométrie analytique.)

140. — *Normale.* On nomme ainsi la perpendiculaire au plan tangent menée par le point de contact. Ses équations sont faciles à établir. Comme la normale passe par le point dont les coordonnées sont x, y, z, ces équations sont de la forme

$$X-x=a(Z-z),\quad Y-y=b(Z-z).$$

D'ailleurs, le plan tangent est représenté par l'équation (4) du numéro précédent. Or on sait que si une droite a pour équations

$$x=az+m,\quad y=bz+n,$$

et si un plan est représenté par

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

les conditions de perpendicularité sont $a=\frac{A}{C}$ et $b=\frac{B}{C}$. Dans

le cas actuel, on aura donc

$$a = \frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{dz}\right)} \quad \text{et} \quad b = \frac{\left(\frac{df}{dy}\right)}{\left(\frac{df}{dz}\right)}.$$

Par conséquent, les équations de la normale sont

$$X - x = \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}}(Z - z) \quad \text{et} \quad Y - y = \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}}(Z - z),$$

ce qu'on peut écrire sous la forme plus symétrique

(5) $$\frac{X - x}{\left(\frac{df}{dx}\right)} = \frac{Y - y}{\left(\frac{df}{dy}\right)} = \frac{Z - z}{\left(\frac{df}{dz}\right)}.$$

Les cosinus des angles que cette droite fait avec les axes des x, des y et des z ont respectivement pour valeur

$$\frac{\frac{df}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{df}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{df}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}}.$$

Remarque. Lorsque l'équation de la surface est donnée sous la forme

$$z = \varphi(x, y) \quad \text{ou} \quad \varphi(x, y) - z = 0,$$

la dérivée du premier membre par rapport à z se réduit à -1; et si l'on représente par p et q les dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y (57), les cosinus des angles que la normale fait avec les axes deviennent

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{p^2+q^2-1}}.$$

En même temps, les équations de la normale deviennent elles-mêmes

$$(X-x) + p(Z-z) = 0,$$

et

$$(Y-y) + q(Z-z) = 0,$$

forme sous laquelle il est utile de les retenir.

141. — Tout plan mené suivant la normale à une surface porte lui-même le nom de *plan normal*. L'équation générale d'un plan normal est de la forme (6)

$$\left[(X-x)\frac{df}{dz} - (Z-z)\frac{df}{dx}\right] + \lambda\left[(Y-y)\frac{df}{dz} - (Z-z)\frac{df}{dy}\right] = 0,$$

λ désignant une indéterminée. C'est bien, en effet, l'équation d'un plan; et l'on reconnait aisément que ce plan contient la normale, car si l'on y remplace $X-x$, et $Y-y$ par leurs valeurs en $Z-z$ tirées des équations (5) de la normale, l'équation (6) est satisfaite, quel que soit Z.

§ 8. — SURFACES ENVELOPPES.

142. — Soit $f(x, y, z, a) = 0$, l'équation d'une famille de surfaces qui ne diffèrent que par la valeur du paramètre a. Si



l'on change a en $a + da$, les deux courbes $f(x, y, z, a) = 0$, et $f(x, y, z, a + da) = 0$, seront dites infiniment voisines l'une de l'autre. Leur intersection sera une courbe à laquelle on donne le nom de *caractéristique*. Le lieu des caractéristiques ainsi déterminées par l'intersection de deux surfaces infiniment voisines, faisant partie d'une même famille, est ce que l'on appelle l'*enveloppe* de ces surfaces.

La recherche de l'équation de l'enveloppe d'une famille de surfaces est tout à fait analogue à celle de l'enveloppe d'une famille de courbes (106).

Soient

(1) $$f(x, y, z, a) = 0,$$

et

(2) $$f(x, y, z, a + \Delta a) = 0$$

les équations de deux surfaces de la même famille; leur intersection sera représentée par l'ensemble des équations (1) et (2). Mais on peut remplacer l'équation (2) par la suivante, qui en est une conséquence.

(3) $$\frac{f(x, y, z, a + \Delta a) - f(x, y, z, a)}{\Delta a} = 0.$$

Si l'on fait tendre Δa vers zéro, l'équation (3) tendra vers

(4) $$f'_a(x, y, z, a) = 0,$$

et l'intersection des deux surfaces deviendra la caractéristique qui répond à la valeur particulière a. Pour avoir le lieu des caractéristiques, ou l'enveloppe cherchée, il suffira donc d'éliminer a entre les équations (1) et (4).

Ainsi, *pour obtenir l'enveloppe d'une famille de surfaces représentées par une équation telle que* $f(x, y, z, a) = 0$, *il suffit d'éliminer le paramètre* a *entre cette équation et sa dérivée prise par rapport à ce paramètre.*

Exemple I. *Un plan se meut en passant constamment par*

un point donné et en demeurant à une distance constante d'un second point donné; on demande l'enveloppe des positions de ce plan. Prenons le premier point pour origine, et faisons passer l'axe des z par le second point; l'équation du plan mobile pourra être mise sous la forme

$$(1)\qquad X\cos\alpha + Y\sin\alpha + kZ = 0.$$

On voit, en effet, que ce plan passe par l'origine. De plus, sa distance à un point situé sur l'axe des z à une distance h de l'origine est exprimée par

$$\frac{kh}{\sqrt{1+k^2}},$$

quantité constante qui peut être regardée comme donnée, ce qui détermine k. Le paramètre arbitraire est ici l'angle α. Si l'on différentie l'équation (1) par rapport à ce paramètre, on obtient

$$(2)\qquad -X\sin\alpha + Y\cos\alpha = 0.$$

L'équation (1) peut d'ailleurs s'écrire

$$X\cos\alpha + Y\sin\alpha = -kZ.$$

Élevant au carré et ajoutant, on obtient

$$(3)\qquad X^2 + Y^2 = k^2Z^2,$$

c'est l'équation d'un cône à base circulaire, comme on pouvait s'y attendre.

II. *Trouver l'enveloppe des sphères de même rayon dont les centres sont sur une circonférence donnée.* L'équation de la sphère mobile est

$$(1)\qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = r^2,$$

en prenant pour axe des z la perpendiculaire élevée par le

centre du cercle donné sur le plan de ce cercle. En même temps on a

$$\alpha^2+\beta^2=R^2.$$

Éliminant d'abord β entre ces deux équations, on obtient

(2) $x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\sqrt{R^2-\alpha^2}\,.\,y+R^2-r^2=0.$

Différentiant par rapport à α, on trouve, après avoir divisé par 2,

(3) $$-x+\frac{\alpha y}{\sqrt{R^2-\alpha^2}},$$

d'où

$$\alpha=\frac{Rx}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

et

$$\sqrt{R^2-\alpha^2}=\frac{Ry}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Substituant dans (2) et réduisant, on obtient

(4) $$x^2+y^2-2R\sqrt{x^2+y^2}+z^2+R^2-r^2=0,$$

c'est l'équation d'un *tore*, comme on pouvait le prévoir.

143. — En chaque point d'une caractéristique, le plan tangent est le même pour l'enveloppe et pour l'enveloppée. Soient, en effet, S_1, S_2, S_3 trois surfaces consécutives de la même famille; AB l'intersection de S_1 et S_2, A'B' l'intersection de S_2 et de S_3. Les deux courbes AB et A'B' seront deux caractéristiques infiniment voisines; par conséquent, deux courbes infiniment voisines sur l'enveloppe. Soit M un point quelconque de la caractéristique AB; joignons-le à un point M' infiniment voisin sur la caractéristique A'B', et menons MT tangent à AB en M. La droite MT, tangente à une courbe tracée sur la surface S_2 et sur l'enveloppe, est tangente à ces deux surfaces. La droite MM', corde d'un arc infiniment petit, se

confond avec sa tangente en M, c'est-à-dire avec une tangente en M à la surface S_2 ou à l'enveloppe. Donc le plan des droites MT et MM' est tangent en M à la surface S_2 et à l'enveloppe ; donc ces deux surfaces ont le même plan tangent au point commun M. Or, ce point M est un point quelconque de la caractéristique AB. Donc enfin l'enveloppe et l'enveloppée S_2 ont les mêmes plans tangents aux différents points de la courbe commune AB; donc ces deux surfaces sont tangentes le long de cette courbe. On en dirait autant d'une enveloppée quelconque.

Fig. 31.

Mais on peut aussi démontrer cette propriété par l'analyse. Soit

$$(1) \qquad f(x, y, z, a) = 0$$

l'équation de la famille de surfaces considérée, et

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

l'équation de l'enveloppe résultant de l'élimination du paramètre a entre l'équation (1) $f=0$ et sa dérivée par rapport à a

$$(3) \qquad \frac{df}{da} = 0.$$

L'équation du plan tangent en un point M d'une caractéristique, point situé sur la surface (1), est (139)

$$(4) \qquad (X-x)\frac{df}{dx} + (Y-y)\frac{df}{dy} + (Z-z)\frac{df}{dz} = 0,$$

et l'équation du plan tangent au même point M, considéré comme situé sur l'enveloppe, est de même

$$(5) \qquad (X-x)\frac{d\varphi}{dx} + (Y-y)\frac{d\varphi}{dy} + Z-z)\frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

Mais l'équation $\varphi(x, y, z) = 0$ n'est autre chose que l'équation (1) dans laquelle a est remplacé par sa valeur en x, y, z tirée de $\frac{df}{da} = 0$; on aura donc les dérivées partielles $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$, en différentiant l'équation (1), pourvu qu'on y regarde a comme une fonction de x, y, z. On trouve ainsi (29, 23)

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{da} \cdot \frac{da}{dx},$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{df}{dy} + \frac{df}{da} \cdot \frac{da}{dy},$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{df}{dz} + \frac{df}{da} \cdot \frac{da}{dz}.$$

Mais, en vertu de l'équation $\frac{df}{da} = 0$, qui est une des équations de la caractéristique, ces relations se réduisent à

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{df}{dx}, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{df}{dy}, \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{df}{dz}.$$

Par conséquent, les équations (5) et (6) sont identiques. Ainsi donc, en tous les points d'une même caractéristique l'enveloppe et les surfaces enveloppées ont les mêmes plans tangents. Donc enfin *chaque enveloppée est tangente à l'enveloppe*, et *la caractéristique est la ligne de contact.*

Il serait facile de vérifier cette propriété sur les exemples traités plus haut.

§ 9. — COURBURE DES SURFACES

144. — *Courbure des surfaces.* Le mot *courbure*, appliqué aux surfaces, n'a pas en Géométrie un sens plus précis que

dans le langage ordinaire ; et il n'existe aucune quantité mathématique qui en soit la mesure. On juge de la courbure d'une surface en un de ses points par celle des différentes lignes que l'on peut faire passer sur la surface par ce point.

On peut remarquer d'abord qu'il suffit de considérer les lignes planes tracées sur la surface. Car si AB est une courbe à double courbure menée sur la surface par le point M, son plan osculateur, passant par les trois points consécutifs M, M', M'', détermine dans la surface une section plane *ab* qui a deux éléments consécutifs MM' et M'M'' ou trois points consécutifs M, M', M'' communs avec AB, et qui, par conséquent, a le même cercle osculateur et le même rayon de courbure.

Fig. 32.

Nous allons chercher les relations qui existent entre les rayons de courbure des différentes lignes planes que l'on peut mener sur la surface par un même point M.

145. — *Théorème de Meunier*. Soit MT une tangente quelconque menée à la surface par le point M ; et soit MN la normale à la surface au point M. Le plan TMN sera un plan normal (141). Il coupera la surface suivant une courbe AB, que l'on appelle une *section normale*, et dont le centre de courbure sera en un certain point C sur MN. Nous désignerons par ρ_0 le rayon de courbure MC de la section normale AB.

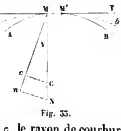


Fig. 33.

Par la même tangente MT, faisons passer un second plan ; il coupera la surface suivant une courbe *ab*, que l'on peut appeler une *section oblique* ; son centre de courbure sera situé en un point *c* sur la normale M*n* à cette courbe. Nous désignerons par ρ le rayon de courbure M*c* de la section oblique *ab*.

Soit V l'angle des deux normales MN et Mn.

La première de ces normales, qui est la normale à la surface, fait avec les axes coordonnés des angles dont les cosinus ont respectivement pour valeur (140)

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

La seconde, qui est la normale principale de la courbe ab, fait avec les mêmes axes des angles qui ont pour valeur (136)

$$\rho\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \rho\frac{d^2y}{ds^2}, \quad \rho\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Or, on sait que si deux droites font avec les axes, l'une des angles a, b, c, l'autre des angles a', b', c', l'angle V de ces deux droites est donné par la relation

$$\cos V = \cos a \cos a' + \cos b \cos b' + \cos c \cos c'.$$

On a donc, dans le cas actuel,

$$(1) \qquad \cos V = \frac{p\rho\frac{d^2x}{ds^2} + q\rho\frac{d^2y}{ds^2} - \rho\frac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{p^2+q^2+1}} = \rho \cdot \frac{p\frac{d^2x}{ds^2} + q\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Mais la courbe ab étant tracée sur la surface, dont l'équation peut être supposée donnée sous la forme $z=f(x,y)$, on peut appliquer l'équation (9) du n° 57, en prenant, au lieu d'une variable indépendante et quelconque, l'arc s de cette courbe. On peut donc écrire, en mettant s à la place de x, et s_1 à la place du coefficient différentiel s, pour éviter toute confusion,

$$\frac{d^2z}{ds^2} = r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2s_1\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds} + t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + p\frac{d^2x}{ds^2} + q\frac{d^2y}{ds^2}.$$

On tire de cette relation

$$p\frac{d^2x}{ds^2}+q\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{d^2z}{ds^2}=-\left[r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2s_1\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}+t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right],$$

et, en substituant dans (1),

$$(2)\qquad \cos V=\rho\,.\,\frac{-\left[r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2s_1\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}\right)+t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Concevons maintenant que l'on fasse varier la section oblique menée par la tangente MT, l'angle V variera ; il en sera de même de ρ ; mais les deux points M et M′ ne cessant pas d'appartenir à la section oblique, les accroissements dx, dy, dz ne changeront pas; les coefficients $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ resteront donc les mêmes. D'ailleurs les coefficients p, q, r, s, t qui ne dépendent que de x, y, n'auront pas varié. Il en résulte que la quantité qui multiplie ρ dans le second membre de l'équation (2) conservera sa valeur ; en la désignant par K on peut donc écrire

$$\cos V=\rho\,.\,K.$$

Cette formule, étant générale, aura lieu encore pour $V=0$, auquel cas la section considérée se confondant avec la section normale, ρ se changera en ρ_0. On peut donc écrire aussi

$$1=\rho_0\,.\,K.$$

En divisant ces deux égalités membre à membre on en tire

$$\cos V=\frac{\rho}{\rho_0},\quad \text{d'où}\quad \rho=\rho_0\cos V,$$

ou

$$Mc=MC\,.\cos V,$$

ce qui montre que *le rayon de courbure de la section oblique*

est la projection, sur le plan de cette section, du rayon de courbure de la section normale.

Cette proposition remarquable est connue sous le nom de *Théorème de Meunier*.

On peut lui donner une forme encore plus frappante. Si l'on décrit une sphère de C comme centre avec MC pour rayon, le plan TMn la coupera suivant un petit cercle dont le centre sera c. Ainsi, *les cercles suivant lesquels les divers plans qu'on peut mener par une même tangente coupent cette sphère sont les cercles osculateurs des sections correspondantes.*

146. — *Indicatrice.* Avant de comparer les courbures des sections faites suivant une même normale, il est utile d'établir une propriété des surfaces dont nous aurons à faire usage.

On nomme *indicatrice* d'une surface courbe en un point donné de cette surface, son intersection avec un plan mené parallèlement au plan tangent à une distance infiniment petite de ce plan. — Comme il s'agit d'étudier une propriété indépendante du choix des axes, on simplifie le calcul en prenant pour plan des xy le plan tangent lui-même, et pour axe des z la normale. Quant à la direction des deux axes des x et des y, nous la laisserons indéterminée pour le moment.

Soit $z=f(x, y)$ l'équation de la surface rapportée à ce système d'axes.

On a vu (71) qu'en développant la fonction $f(x, y)$ par la formule de Maclaurin on peut écrire

$$(1)\qquad z=f(0,0)+\frac{1}{1}\left[\left(\frac{df}{dx}\right)_0 x+\left(\frac{xf}{dy}\right)_0 y\right]$$
$$+\frac{1}{1.2}\left[\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) x^2+2\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)_0 xy+\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)_0 y^2\right]+\ldots$$

Si l'on fait $z=h$, la lettre h représentant une quantité infiniment petite, positive ou négative, on aura l'équation d'un lan parallèle au plan tangent et infiniment voisin de ce an ; son intersection avec la surface sera donc l'indicatrice ;

et comme celle-ci se projette en vraie grandeur sur le plan des xy qui lui est parallèle, on aura son équation en remplaçant z par h dans l'équation (1). Mais cette équation peut être simplifiée. En premier lieu, h étant infiniment petit, il en sera, en général, de même des coordonnées x et y des points communs à la surface et au plan $z=h$; on pourra donc négliger les termes affectés des puissances de x et de y supérieures à la seconde. En second lieu, la surface passant par l'origine, on a $f(0,0)=0$. Enfin, le plan des xy étant le plan tangent, les dérivées partielles $\frac{df}{dx}$ et $\frac{df}{dy}$ s'annulent pour l'origine, c'est-à-dire pour $x=0$ et $y=0$. Car il faut que l'équation du plan tangent, qui, dans le cas de $z=f(x,y)$ est

$$(X-x)\frac{df}{dx}+(Y-y)\frac{df}{dy}-(Z-z)=0,$$

se réduise à $Z=0$ pour $x=0$, $y=0$, $z=0$, indépendamment de X et de Y, ce qui exige que les termes en X et Y disparaissent. Si donc on pose pour abréger

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0=r_0,\quad \left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)_0=s_0,\quad \left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)_0=t_0,$$

il restera pour l'équation de l'indicatrice

$$2h=r_0x^2+2s_0xy+t_0y^2.$$

On peut même la simplifier encore, car, la direction des axes des x et des y étant jusqu'ici indéterminée, on peut la choisir de manière à faire disparaître le terme en xy. Il reste alors

$$(2)\qquad 2h=r_0x^2+t_0y^2.$$

147. — Si r_0 et t_0 sont de même signe, il faut, pour que

cette équation représente une courbe réelle, donner le même signe à h ; ce qui veut dire qu'aux environs du point de contact la surface est tout entière d'un même côté du plan tangent. L'indicatrice est alors une *ellipse*. Elle se réduit à l'origine pour $h=0$.

L'ellipsoïde, le paraboloïde elliptique et l'hyperboloïde à deux nappes offrent l'exemple du cas dont nous parlons.

Si r_0 et t_0 sont de signe contraire, on peut donner à h le signe + ou le signe —. Ainsi la surface s'étend alors des deux côtés du plan tangent. — Pour h positif ou pour h négatif, l'indicatrice est une *hyperbole ;* mais les deux hyperboles, projetées sur le plan des xy, sont *conjuguées ;* c'est-à-dire qu'elles ont les mêmes asymptotes ; mais que si l'une est située dans le premier et le troisième angle des asymptotes, l'autre est située dans le deuxième et le quatrième. Elles se réduisent toutes deux à leurs asymptotes pour $h=0$. L'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique offrent l'exemple de ce cas.

Si l'on a $r_0=0$, l'indicatrice se compose de deux droites parallèles à l'axe des x et infiniment voisines. Elle se réduit à l'axe des x pour $h=0$.

Si l'on a $t_0=0$, l'indicatrice se compose de deux droites parallèles à l'axe des y, et elle se réduit à cet axe pour $h=0$. Le cylindre est un exemple de ce cas.

Il en est de même du cône, parce qu'un plan infiniment voisin du plan tangent coupe la surface suivant une parabole qui dégénère en deux droites parallèles.

148. — *Théorème d'Euler*. Nous pouvons maintenant reprendre l'étude de la courbure des surfaces, et comparer les courbures des sections planes faites suivant une même normale. — Supposons, comme tout à l'heure que O soit le point de la surface que l'on considère, que XOY soit le plan tangent et OZ la normale. Soit ZOU un plan quelconque mené suivant cette normale, et OA son intersection avec la surface. Soit M

un point de cette intersection très-voisin du point O ; soit MP son ordonnée. Joignons OM ; menons MH parallèle à OU, et MB perpendiculaire à OM. Enfin soit C le milieu de OB.

Le cercle qui, dans le plan ZOU, a le point C pour centre et CO pour rayon tendra vers le cercle osculateur de l'arc OA en O, quand le point M se rapprochera indéfiniment du point O. Car, dans le triangle OCM, l'angle en C tendant vers zéro, les angles égaux COM et CMO tendent vers 90° ; et par conséquent CM tend vers une perpendiculaire à la corde OM, ou vers une normale à l'arc OM.

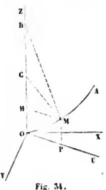


Fig. 34.

En appelant ρ le rayon de courbure de la section OA au point O, on a donc

$$\rho = \lim . OC = \lim . \frac{1}{2} OB = \lim . \frac{1}{2}\left(OH + \frac{\overline{MH}^2}{OH}\right)$$

$$= \lim . \frac{1}{2} OH + \lim . \frac{\overline{MH}^2}{2\,OH}.$$

Or

$$\lim . \frac{1}{2} OH = 0.$$

Donc

$$\rho = \lim . \frac{\overline{MH}^2}{OH}$$

ou, en posant $OH = h$ et $MH = u$,

$$\rho = \lim . \frac{u^2}{2h}.$$

Mais si θ représente l'angle XOU, θ et u peuvent être regardés comme les coordonnées polaires du point M dans un plan

parallèle à XOY. Ce plan coupe la surface suivant l'indicatrice, dont l'équation est

$$r_0 x^2 + t_0 y^2 = 2h$$

ou, en coordonnées polaires,

$$u^2 (r_0 \cos^2 \theta + t_0 \sin^2 \theta) = 2h.$$

Or, à la limite, on a

$$\rho = \frac{u^2}{2h},$$

d'où

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2h}{u^2}.$$

Donc enfin

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho} = r_0 \cos^2 \theta + t_0 \sin^2 \theta.$$

Supposons d'abord que l'indicatrice soit une ellipse. Soient R_1 et R_2 le maximum et le minimum des valeurs de ρ, correspondantes à $\theta = 0$ et à $\theta = 90°$ ou *vice versa*, on aura

$$\frac{1}{R_1} = r_0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{R_2} = t_0.$$

Par conséquent

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \theta + \frac{1}{R_2} \sin^2 \theta.$$

Changeons θ en $\theta + 90°$; et soit ρ_1 la valeur correspondante de ρ ; on aura de même

$$(5) \qquad \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{R_1} \sin^2 \theta + \frac{1}{R_2} \cos^2 \theta.$$

En ajoutant membre à membre les relations (4) et (5), on obtient

$$(6) \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

c'est-à-dire que *la somme des courbures de deux sections normales perpendiculaires entre elles est une quantité constante.* La formule (6) est connue sous le nom de *théorème d'Euler.*

Dans le cas où l'on a $r_0 = t_0$, c'est-à-dire où l'indicatrice est un cercle, il en résulte $R_1 = R_2$; et l'on a $\rho = R_1$, indépendamment de l'angle θ. Les points d'une surface qui jouissent de cette propriété que la courbure des sections normales est la même dans toutes les directions portent le nom d'*ombilics.*

Dans l'ellipsoïde, par exemple, il y a quatre ombilics : ce sont les points où le plan tangent est parallèle à une section circulaire ; car, en ces points, l'indicatrice est évidemment un cercle.

149. — Supposons r_0 et t_0 de signes contraires ; en donnant à h des valeurs positives et négatives et opérant comme cidessus, on trouvera

$$(7) \qquad \frac{1}{\rho} = \pm \left(\frac{1}{R_1}\cos^2\theta - \frac{1}{R_2}\sin^2\theta\right).$$

Le rayon de courbure ρ a, dans ce cas, deux minimums R_1 et R_2 répondant à $\theta = 0$ et à $\theta = 90°$; et il devient infini pour

$$\text{tang}\,\theta = \pm\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \pm\sqrt{-\frac{r_0}{t_0}};$$

ce sont les directions asymptotiques.

En résumé, on voit, par la relation $\rho = \frac{u^2}{2h}$, que le rayon de courbure d'une section normale est proportionnel au carré du rayon vecteur de l'indicatrice.

Les sections normales pour lesquelles le rayon de courbure est un maximum ou un minimum, portent le nom de *sections principales*, et les courbures correspondantes sont dites des *courbures principales*. En chaque point de la surface, les sections principales sont perpendiculaires entre elles.

La recherche des rayons de courbure des surfaces peut donner lieu à des *cas singuliers*, qui sont sans intérêt dans les applications, et pour lesquelles nous renverrons aux traités plus étendus.

150. — *Lignes de courbure.* On appelle *ligne de courbure* d'une surface, toute ligne tracée sur cette surface, et jouissant de la propriété que les normales à la surface, en chacun des points de cette ligne, sont les génératrices d'une surface développable.

On sait qu'une surface développable est le lieu des tangentes à une courbe à double courbure, à laquelle on donne le nom d'*arête de rebroussement.* Soient M et M' deux points infiniment voisins sur la ligne de courbure, et dont les coordonnées sont x, y, z, et $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$. Soient N et N' les points où les normales à la surface menées en M et M' touchent l'arête de rebroussement de la surface développable. Cette arête de rebroussement étant une courbe à double courbure, ses tangentes en N et en N' ne sont pas dans un même plan, mais leur plus courte distance est un infiniment petit du troisième ordre (135, IV); si donc on néglige les infiniment petits de cet ordre devant ceux d'un ordre inférieur, on peut regarder les normales consécutives MN et M'N' comme situées dans un même plan, et comme concourant en un certain point C, dont nous désignerons les coordonnées par X et Y.

Supposons l'équation de la surface donnée sous la forme $z=f(x,y)$, et désignons par p et q les dérivées partielles de la fonction z, par rapport à x et à y. Le point C étant sur la normale MN, on aura, en vertu des équations de cette nor-

male (140)

$$(X-x)+p(Z-z)=0$$

et

$$(Y-y)+q(Z-z)=0.$$

Mais le point C se trouvant aussi sur la normale M'N', il faut que ces deux équations subsistent quand on y remplacera les coordonnées x, y, z du point M par les coordonnées $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ du point M', sans faire varier X, Y et Z, ce qui revient à dire que l'on peut égaler à zéro les différentielles des premiers membres des deux équations ci-dessus, en regardant X, Y, Z comme constants, et z, bien entendu, comme fonction de x et de y, ce qui donne, en posant toujours

$$\frac{dp}{dx}=r,\quad \frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}=s,\quad \text{et}\quad \frac{dq}{dy}=t,$$

$$-dx-p(pdx+qdy)+(rdx+sdy)(Z-z)=0,$$

d'où

$$Z-z=\frac{(1+p^2)\,dx+pq\,dy}{rdx+sdy},$$

et

$$-dy-q(pdx+qdy)+(sdx+tdy)(Z-z)=0,$$

d'où

$$Z-z=\frac{(1+q^2)\,dy+pq\,dx}{sdx+tdy},$$

et par conséquent

$$(1)\qquad \frac{(1+p^2)\,dx+pqdy}{rdx+sdy}=\frac{(1+q^2)\,dy+pqdx}{sdx+tdy}.$$

Telle est la relation à laquelle doivent satisfaire les accroisse-

ments infiniment petits dx et dy, pour que le point M′ soit sur la ligne de courbure passant par le point M. Ayant l'équation de la surface, on peut regarder les quantités p, q, r, s, t comme des fonctions données de x et de y, la relation (1) est donc l'équation différentielle de la ligne de courbure passant au point M, ou plutôt l'équation différentielle de sa projection sur le plan des xy. Et si l'on savait en déduire la relation qui lie y à x, cette relation, jointe à l'équation de la surface, déterminerait complétement la ligne de courbure.

On voit que la recherche des lignes de courbure dépend du calcul inverse du calcul différentiel, c'est-à-dire du calcul intégral.

151. — Mais on peut, sans remonter à la relation primitive entre x et y, qui caractérise une ligne de courbure, démontrer une propriété importante de ce genre de lignes. Divisons par dx les deux termes de chaque membre de l'équation (1). Posons, comme d'habitude,

$$\frac{dy}{dx} = y',$$

puis chassons les dénominateurs et ordonnons par rapport aux puissances décroissantes de y', il viendra

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} [(1+q^2)s - pqt]y'^2 + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]\,y' \\ \quad - [(1+p^2)s - pqr] = 0. \end{array} \right.$$

Cette équation étant du second degré en y', elle montre déjà qu'il y a en général deux directions à prendre sur la surface, en partant du point M, pour y tracer une ligne de courbure.

Mais, comme il s'agit ici d'une propriété géométrique indépendante de la position des axes, nous pouvons les choisir de manière à simplifier le calcul. Nous prendrons, comme au n° 146, le point M pour origine, le plan tangent en M pour plan des xy, et nous dirigerons l'axe des x, et par suite l'axe

des y, de manière à faire disparaître le terme en xy dans l'équation de l'indicatrice. Ce choix d'axes suppose les valeurs

$$p=0,\quad q=0,\quad \text{et}\quad s=0.$$

L'équation (2) se réduit donc à

$$(3)\qquad (r-t)\,y'=0.$$

Si le point M que l'on considère n'est pas un ombilic, et que r soit différent de t, cette équation donne $y'=0$; et comme elle a perdu son premier terme, elle donne aussi

$$y'=\infty.$$

Les deux directions indiquées par ces valeurs sont donc perpendiculaires entre elles.

Or, on a vu au n° 146, que les plans des zx et des zy que nous avons choisis sont précisément les plans des sections principales faites au point M. C'est donc dans la direction des sections principales au point M qu'il faut marcher sur la surface en partant de ce point, pour tracer sur la surface une ligne de courbure.

Il résulte de ce qui précède : 1° qu'en chaque point M d'une surface, sauf les points singuliers dont il n'est point question ici, passent deux lignes de courbure; et que ces deux lignes de courbure sont perpendiculaires entre elles; 2° que ces lignes de courbure ont chacune un élément commun avec une des sections principales, ou, plus exactement, qu'elles ont pour tangente en M la tangente en ce point à la section principale correspondante.

Il en résulte encore qu'on peut tracer sur une surface deux systèmes de lignes de courbure qui la divisent en quadrilatères curvilignes ayant leurs angles droits.

On voit que les lignes de courbure tirent leur nom de ce qu'en chaque point elles ont la direction qui répond au maximum et au minimum de courbure en ce point.

152. — Dans les surfaces cylindriques, le plan tangent en un point est tangent tout le long de la génératrice qui passe par ce point; les normales à la surface menées par les divers points de cette génératrice sont donc comprises dans un même plan perpendiculaire au plan tangent; or le plan est compris parmi les surfaces développables. Les génératrices d'un cylindre forment donc un premier système de lignes de courbure. Le second système est formé par les sections droites, qui sont des courbes perpendiculaires aux génératrices.

Dans les surfaces coniques, le plan tangent en un point est également tangent tout le long de la génératrice qui passe par ce point; et l'on en conclura comme ci-dessus que les génératrices du cône forment un premier système de lignes de courbure; le second système est formé par les courbes qui coupent toutes les génératrices à angle droit. On appelle ces courbes les *trajectoires orthogonales* des génératrices. Dans le cône de révolution, ces trajectoires ne sont autre chose que les parallèles de la surface.

Plus généralement, dans les surfaces développables, le plan tangent en un point contient, comme dans toutes les surfaces réglées, la génératrice qui passe par ce point, mais il peut aussi être considéré comme contenant la génératrice infiniment voisine; car ces deux génératrices étant tangentes aux extrémités d'un même élément de l'arête de rebroussement, leur plus courte distance est un infiniment petit du troisième ordre (135, IV). Il en résulte que le plan tangent en un point est tangent tout le long de la génératrice qui passe par ce point. Donc encore les génératrices forment un premier système de lignes de courbure, et le second système est formé de leurs trajectoires orthogonales.

Dans les surfaces gauches, deux génératrices infiniment voisines ne peuvent plus être considérées comme situées dans un même plan, et le plan tangent en un point de la surface, bien que contenant la génératrice qui passe par ce point, n'est tangent qu'en ce point à la surface. Les normales à la surface

menées par les différents points d'une même génératrice sont sur une surface gauche à plan directeur, perpendiculaire à la génératrice, et ne sont par conséquent plus sur une surface développable. Il en résulte que, dans les surfaces gauches, les génératrices ne sont plus des lignes de courbure. Si l'on coupe la surface par un plan parallèle au plan tangent et infiniment voisin de ce plan, il ne peut rencontrer la génératrice contenue dans le plan tangent; il coupe donc la surface suivant une courbe à branches infinies; et, d'après ce que nous avons vu au n° 147, cette courbe est une hyperbole; la direction des lignes de courbure qui passent au point considéré est déterminée par les axes de cette hyperbole. Dans les surfaces gauches du second degré, par exemple, qui ont deux systèmes de génératrices rectilignes, le plan tangent en un point de la surface contient les deux génératrices de différents systèmes qui passent en ce point; l'indicatrice est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à ces deux génératrices; pour obtenir la direction des lignes de courbure qui passent au point considéré, il faut donc marcher sur la surface dans la direction des bissectrices des angles formés par ces génératrices.

Dans les surfaces de révolution, les normales aux différents points d'un même méridien sont contenues dans le plan de ce méridien, c'est-à-dire qu'elles appartiennent à une surface développable. Les méridiens forment donc un premier système de lignes de courbure. Les normales aux différents points d'un même parallèle viennent concourir en un même point de l'axe de révolution; elles sont donc situées sur un cône, c'est-à-dire sur une surface développable; ainsi les parallèles de la surface forment le second système de lignes de courbure.

Si l'on applique à l'ellipsoïde à trois axes inégaux l'équation (2) du n° 151, on obtient, pour l'équation différentielle de la projection des lignes de courbure sur le plan des xy, une équation de la forme

$$Axy \cdot y'^2 + (x^2 - my^2 - n)\, y' - xy = 0,$$

et, en remontant à l'équation primitive entre x et y (*voy.* les traités de Calcul intégral), on reconnaît que les projections des lignes de courbure sur le plan des xy, qui contient le grand axe et l'axe moyen, sont, pour l'un des systèmes, des ellipses, et pour l'autre système des hyperboles. Ces ellipses et ces hyperboles tournent leur concavité vers les points où se projettent les ombilics.

§ 10. — CARACTÈRES ANALYTIQUES DES PRINCIPALES FAMILLES DE SURFACES.

153. — *Surfaces cylindriques.* Une surface cylindrique peut être considérée comme engendrée par une droite qui reste parallèle à elle-même, en rencontrant toujours une courbe fixe qu'on appelle sa directrice ; et l'on ne restreint pas la généralité de cette définition en supposant que la courbe fixe soit plane ; car on peut toujours prendre pour directrice l'intersection du cylindre par un plan, pourvu que ce plan ne soit pas parallèle aux génératrices.

Supposons donc la directrice plane ; prenons son plan pour plan des xy, et soit

$$(1) \qquad \varphi(x, y) = 0,$$

son équation dans ce plan. Soient

$$(2) \qquad x = az + \alpha \quad \text{et} \quad y = bz + \beta,$$

les équations d'une génératrice quelconque. Les coordonnées de ses traces sur le plan des xy, savoir

$$x = \alpha \quad \text{et} \quad y = \beta,$$

devront satisfaire à l'équation (1) ; on aura donc

$$(3) \qquad \varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

ou, en mettant pour α et β leurs valeurs tirées des équations (2),

$$(4) \qquad \varphi(x - az,\ y - bz) = 0.$$

C'est l'équation générale des surfaces cylindriques.

On peut en déduire une relation indépendante de la fonction arbitraire φ. Pour cela, différentions successivement l'équation (3) par rapport à x et par rapport à y ; nous obtiendrons, en posant comme d'ordinaire

$$\frac{dz}{dx} = p \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dy} = q,$$

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} \cdot (1 - ap) - \frac{d\varphi}{d\beta} bp = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{d\alpha} aq + \frac{d\varphi}{d\beta}(1 - bq) = 0.$$

Si l'on égale les valeurs du rapport $\dfrac{\left(\dfrac{d\varphi}{d\alpha}\right)}{\left(\dfrac{d\varphi}{d\beta}\right)}$ tirées de ces relations, on trouve

$$(5) \qquad \frac{bp}{1 - ap} = \frac{1 - bq}{aq} \quad \text{ou} \quad ap + bq = 1\ ;$$

c'est le *caractère analytique* des surfaces cylindriques, ou l'équation aux *différences partielles* de toutes les surfaces de ce genre. On voit qu'elle est du premier ordre.

Nota. On appelle *équation différentielle* toute relation entre les différentielles de plusieurs variables ; une relation entre les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables s'appelle une *équation aux différences partielles*, le mot différences étant pris ici dans le sens de différentielles.

154. — *Surfaces coniques.* On regarde une surface conique comme engendrée par une droite assujettie à passer par un point fixe, qui est le *sommet* du cône, et à rencontrer une di-

rectrice fixe, que l'on peut supposer plane sans restreindre la généralité de la question; car on peut toujours prendre pour directrice l'intersection de la surface par un plan quelconque, pourvu que ce plan ne passe pas par le sommet.

Prenons donc le plan de la directrice pour plan des xy, soit

$$(1) \qquad \varphi(x, y) = 0$$

son équation dans ce plan; et soient x_0, y_0, z_0, les coordonnées du sommet.

Les équations d'une génératrice seront de la forme

$$(2) \qquad x - x_0 = a(z - z_0) \quad \text{et} \quad y - y_0 = b(z - z_0).$$

Les coordonnées de sa trace sur le plan des x, y sont

$$x = x_0 - az_0 \quad \text{et} \quad y = y_0 - bz_0.$$

Ces coordonnées doivent satisfaire à l'équation (1); ainsi l'on doit avoir

$$\varphi(x_0 - az_0,\ y_0 - bz_0) = 0,$$

ou, en vertu des équations (2),

$$(3) \qquad \varphi(x - az,\ y - bz) = 0.$$

On en tire, comme ci-dessus, par la différentiation par rapport à x et par rapport à y, la condition

$$(4) \qquad ap + bq = 1,$$

et, en mettant pour les paramètres variables a et b leurs valeurs tirées des équations (2),

$$(5) \qquad z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0);$$

c'est le caractère analytique des surfaces coniques, ou l'équa-

tion aux différences partielles de toutes les surfaces de ce genre. Elle est encore du premier ordre.

153. — *Surfaces de révolution*. Soient

$$(1) \qquad X = aZ + \alpha \quad \text{et} \quad Y = bZ + \beta$$

les équations de l'axe de révolution. La surface peut être considérée comme engendrée par un cercle variable perpendiculaire à cet axe et ayant son centre sur cet axe. On peut regarder ce cercle comme l'intersection d'une sphère de rayon variable, ayant son centre en un point déterminé de l'axe de révolution, par exemple, sa trace sur le plan des xy, dont les coordonnées sont $X=\alpha$, $Y=\beta$, $Z=0$, et d'un plan variable perpendiculaire à l'axe. Ce cercle peut donc être représenté par l'ensemble des deux équations :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = \rho^2, \\ ax + by + c = k, \end{array} \right.$$

les variables ρ^2 et k étant liées par une relation arbitraire

$$(3) \qquad \rho^2 = \varphi(k),$$

qui déterminera la loi suivant laquelle varie le cercle générateur. Ainsi la surface de révolution peut être représentée par l'équation

$$(4) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = \varphi(ax + by + c).$$

En différentiant l'équation (3) d'abord par rapport à x et ensuite par rapport à y, on pourrait éliminer, comme on l'a fait aux deux numéros précédents, la fonction arbitraire φ, et obtenir l'équation différentielle générale des surfaces de révolution. Mais on l'obtient plus simplement en remarquant que, dans ce genre de surfaces, la normale rencontre l'axe. Si donc X, Y, Z sont les coordonnées du point de rencontre, ces coor-

données doivent satisfaire d'une part aux équations (1), et de l'autre aux équations de la normale (140), savoir

$$(5)\quad (X-x)+p(Z-z)=0 \text{ et } (Y-y)+q(Z-z)=0;$$

Si l'on élimine X, Y, Z entre les équations (1) et (5), on obtient

$$(6)\quad (a+p)(qz+y-\beta)-(b+q)(pz+x-\alpha)=0,$$

c'est l'équation aux différences partielles des surfaces de révolution.

Cette équation peut s'écrire :

$$(y-bz-\beta)p-(x-az-\alpha)q+a(y-\beta)-b(x-\alpha)=0.$$

156. — *Surfaces développables.* Une surface développable peut être considérée comme l'enveloppe d'un plan mobile, c'est-à-dire d'une famille de plans dont les équations ne diffèrent que par un paramètre variable. L'équation d'une pareille famille de plans peut être présentée sous la forme

$$(1)\qquad z=h+x\varphi(h)+y\psi(h),$$

et l'équation de l'enveloppe résulterait de l'élimination de h entre cette relation et sa dérivée par rapport à h, c'est-à-dire

$$(2)\qquad 0=1+x\varphi'(h)+y\psi'(h).$$

Mais on peut, sans particulariser les fonctions φ et ψ, et par conséquent sans opérer l'élimination de h, obtenir l'équation différentielle des surfaces développables.

En effet, la différentielle totale de z donnée par l'équation de la surface doit être de la forme

$$(3)\qquad dz=p\,dx+q\,dy,$$

p et q désignant les dérivées partielles de z par rapport à x et

à y. Or, si l'on différentie l'équation (1) en faisant tout varier, on obtient

$$dz = dh + x\varphi'(h)\,dh + y\psi'(h)\,dh + \varphi(h)\,dx + \psi(h)\,dy.$$

Mais les termes multipliés par dh disparaissent en vertu de l'équation (2) ; il reste donc

$$dz = \varphi(h)\,dx + \psi(h)\,dy,$$

ce qui exige

$$p = \varphi(h) \quad \text{et} \quad q = \psi(h).$$

Concevons qu'on ait tiré de ces deux dernières les valeurs

$$h = \Phi(p), \quad \text{et} \quad h = \Psi(q).$$

Il en résulte d'abord

(3) $$\Phi(p) = \Psi(q),$$

et l'équation (1) de la surface peut s'écrire

(4) $$z = \Phi(p) + px + qy, \quad \text{ou} \quad z = \Psi(q) + px + qy;$$

c'est une première forme de l'équation différentielle de la surface. Mais elle contient une fonction arbitraire; pour la faire disparaître on opérera comme il suit. Reprenons l'équation (3). On en tire, en différentiant,

$$\Phi'(p)\,dp = \Psi'(q)\,dq,$$

et, attendu que l'on a

$$dp = s\,dx + t\,dy \quad \text{et} \quad dq = r\,dx + s\,dy,$$

en désignant par r, s, t les dérivées partielles du second ordre (57, Rem. I), il vient

$$\Phi'(p)(s\,dx + t\,dy) = \Psi'(q)(r\,dx + s\,dy).$$

Comme x et y sont deux variables indépendantes, cette relation doit avoir lieu indépendamment des valeurs particulières attribuées à dx et à dy ; il faut donc que l'on ait séparément

$$\Phi'(p).s = \Psi'(q).r \quad \text{et} \quad \Phi'(p).t = \Psi'(q).s,$$

et, en divisant ces relations membre à membre, on obtient

$$(5) \qquad \frac{s}{t} = \frac{r}{s}, \quad \text{d'où} \quad s^2 - rt = 0,$$

c'est l'équation aux différences particlles des surfaces développables. On voit qu'elle est du second ordre et du second degré.

Remarque. On vérifie aisément que les surfaces cylindriques et les surfaces coniques satisfont à la relation (5).

Pour les surfaces cylindriques, par exemple, on a trouvé le caractère

$$ap + bq = 1.$$

On en tire

$$adp + bdq = 0,$$

ou

$$a(sdx + tdy) + b(rdx + sdy) = 0.$$

Cette relation devant être satisfaite indépendamment du rapport entre les valeurs de dx et de dy, on doit avoir séparément

$$as + br = 0 \quad \text{et} \quad at + bs = 0,$$

et, en éliminant entre ces deux relations le rapport $\frac{a}{b}$, on retombe sur la condition (5).

Pour les surfaces coniques, on a trouvé le caractère

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0).$$

On en tire

$$dz = pdx + qdy + dp\,(x - x_0) + dq\,(y - y_0).$$

Mais on a

$$dz = pdx + qdy;$$

il reste donc

$$dp\,(x - x_0) + dq\,(y - y_0) = 0,$$

ou

$$(s\,dx + t\,dy)\,(x - x_0) + (r\,dx + s\,dy)\,(y - y_0),$$

équation qui se sépare en deux comme ci-dessus, et donne

$$s\,(x - x_0) + r\,(y - y_0) = 0,$$

avec

$$t\,(x - x_0) + s\,(y - y_0) = 0,$$

et en éliminant entre ces deux dernières le rapport $\dfrac{x - x_0}{y - y_0}$, on retombe sur la condition (5).

157. — *Surfaces gauches.* On distingue ordinairement parmi ces surfaces celles qui ont une directrice rectiligne et celles qui ont un plan directeur.

I. — Supposons d'abord que la surface ait une directrice rectiligne. On la prend ordinairement pour axe des z, et si $z = h$ est l'ordonnée du point où une génératrice de la surface rencontre la directrice, les équations de cette génératrice peuvent être mises sous la forme

(1) $$z = h + x\varphi(h), \quad \text{et} \quad z = h + y\psi(h).$$

On en tire

$$x\varphi(h) = y\psi(h),$$

ou

$$\frac{y}{x}=\frac{\varphi(h)}{\psi(h)},$$

ce qui montre que h est une fonction du rapport $\frac{y}{x}$. On peut donc poser

$$h=\Phi\left(\frac{y}{x}\right),$$

d'où

$$\varphi(h)=\Psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

et, par suite, l'équation de la surface peut s'écrire

$$(2)\qquad z=\Phi\left(\frac{y}{x}\right)+x\,\Psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

On éliminera la fonction Φ par une première différentiation par rapport à x ou par rapport à y ; car on obtient ainsi

$$p=-\Phi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}+\Psi\left(\frac{y}{x}\right)-x\Psi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2},$$

$$q=\Phi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}+x\Psi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x},$$

et, si l'on multiplie la première de ces relations par x, la seconde par y, et qu'on ajoute, on trouve

$$(3)\qquad px+qy=x\Psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

On élimine la fonction Ψ par une seconde différentiation, car on obtient

$$rx+p+sy=\Psi\left(\frac{y}{x}\right)-\Psi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y}{x},$$

et

$$sx + ty + q = \Psi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Multipliant la première de ces relations par x, et la seconde par y, puis ajoutant membre à membre, on trouve

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 + px + qy = x\Psi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

relation qui, en vertu de l'équation (3), se réduit à

$$(4) \qquad rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0.$$

II. Supposons, en second lieu, que la surface ait un plan directeur. On le prend ordinairement pour plan des xy, et si h est l'ordonnée d'un point de la surface, les équations de la génératrice qui passe par ce point peuvent être écrites sous la forme

$$z = h, \quad y = x\varphi(h) + \psi(h).$$

On en déduit immédiatement pour l'équation de la surface

$$(5) \qquad y = x\varphi(z) + \psi(z).$$

On élimine la fonction arbitraire ψ par une première différentiation, qui donne

$$0 = \varphi(z) + x\varphi'(z)p + \psi'(z)p,$$
$$1 = x\varphi'(z)q + \psi'(z)q.$$

Multipliant la première par q, la seconde par p, et retranchant, on obtient

$$(6) \qquad p = -q\varphi(z), \quad \text{ou} \quad p + q\varphi(z) = 0.$$

Une seconde différentiation fait disparaître la fonction arbitraire φ, car on trouve, en différentiant, par rapport à x ou

par rapport à y,

$$r + s\varphi(z) + \varphi'(z)pq = 0,$$
$$s + t\varphi(z) + \varphi'(z)q^2 = 0.$$

Si l'on multiplie la première de ces relations par q, la seconde par p, que l'on retranche membre à membre, et que l'on mette pour $\varphi(z)$ sa valeur tirée de l'équation (6), on obtient

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0.$$

III. — Les *conoïdes* sont des surfaces gauches qui ont à la fois une directrice rectiligne et un plan directeur; elles doivent donc satisfaire à la fois aux deux conditions (4) et (7).

Mais si le conoïde est *droit*, c'est-à-dire si la directrice rectiligne est perpendiculaire au plan directeur, la surface peut être caractérisée par une équation différentielle plus simple. Prenons la directrice rectiligne pour axe des z, et le plan directeur pour plan des xy; les équations d'une génératrice pourront être mises sous la forme

$$z = h, \quad y = x\varphi(h),$$

ce qui donne pour l'équation de la surface,

$$y = x\varphi(z), \tag{8}$$

équation que l'on peut aussi écrire

$$z = \Phi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{9}$$

On élimine la fonction arbitraire φ en différentiant l'équation (8) par rapport à x et par rapport à y, ce qui donne

$$0 = \varphi(z) + x\varphi'(z)p,$$
$$1 = x\varphi'(z)q.$$

Multipliant la première de ces relations par q, la seconde

par p, et retranchant membre à membre, on obtient,

$$p = -q\varphi(z), \quad \text{ou} \quad p + q\varphi(z) = 0,$$

ou, en mettant pour $\varphi(z)$ sa valeur tirée de (8),

$$p + \frac{qy}{x} = 0, \quad \text{ou enfin} \quad px + qy = 0,$$

équation aux différences partielles qui n'est que du premier ordre.

158. — *Surfaces réglées.* On peut demander le caractère analytique général des surfaces réglées. — Dans ce cas les équations d'une génératrice renferment trois fonctions arbitraires. Car si on les met sous la forme

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

on peut d'abord regarder β comme une fonction de α; la relation $\beta = f(\alpha)$ représentant la trace de la surface sur le plan des xy. En regardant ensuite les inclinaisons a et b comme des fonctions de α et de β, ou, ce qui revient au même, de α seul, on peut écrire

$$x = \alpha + \varphi(\alpha) . z, \quad y = f(\alpha) + \psi(\alpha) . z;$$

les fonctions φ, ψ et f étant trois fonctions arbitraires, expriment la loi suivant laquelle la génératrice se déplace.

On ne peut faire disparaître ces trois fonctions arbitraires qu'en différentiant trois fois de suite par rapport à x et par rapport à y. La relation qui caractérise les surfaces réglées est donc une équation aux différences partielles du troisième ordre ; on trouve de plus qu'elle est du troisième degré. Nous renverrons aux traités plus étendus pour la recherche de cette équation différentielle qui n'a point d'utilité dans les applications.

FIN DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

DEUXIÈME PARTIE

PREMIERS ÉLÉMENTS DU CALCUL INTÉGRAL

I. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES

159. — Le calcul intégral est l'inverse du calcul différentiel. Dans ce dernier, les questions se ramènent toujours en définitive à trouver la dérivée d'une fonction ; dans le calcul intégral, au contraire, les questions sont toujours ramenées à trouver une fonction connaissant sa dérivée. Les notions fondamentales du calcul intégral peuvent être présentées de diverses manières ; la plus simple est celle qui s'appuie sur les considérations géométriques suivantes.

160. — Soit $y = f(x)$ l'équation, en coordonnées rectangulaires, d'une courbe plane AB ; et proposons-nous d'évaluer l'aire AA'B'B comprise entre cette courbe, l'axe des x et les deux ordonnées AA' et BB', répondant aux abscisses $OA' = a$ et $OB' = b$.

Fig. 35.

Pour cela, divisons l'intervalle A'B' en n parties égales, et par tous les points de division menons des ordonnées; l'aire à évaluer se trouvera divisée en n petits trapèzes curvilignes tels que MPP' M'. Par les points M et M menons les droites MI et M' II parallèles à l'axe des x ; nous formerons deux rectangles : l'un MPP' I plus petit que le trapèze correspondant MPP' M', l'autre HPP' M' plus grand que ce trapèze. Si nous opérons de même pour les autres, nous

formerons deux séries de rectangles, les uns intérieurs et dont la somme sera moindre que l'aire à évaluer, les autres extérieurs et dont la somme sera plus grande que l'aire à évaluer.

Si donc on désigne par U cette aire, par y_0, y_1, y_2, ..., y_n les ordonnées successives tracées sur la figure, depuis AA' jusqu'à BB', et h l'intervalle PP' compris entre deux ordonnées consécutives, on aura

$$U > y_0 h + y_1 h + y_2 h \ldots + y_{n-1} h$$

et

$$U < y_1 h + y_2 h \ldots + y_{n-1} h + y_n h.$$

Les seconds membres de ces inégalités diffèrent de $y_n h - y_0 h$ ou de $(y_n - y_0) h$.

Or le facteur $y_n - y_0$ est constant, et le facteur h peut devenir aussi petit que l'on voudra en prenant n suffisamment grand. L'aire U est donc comprise entre deux sommes dont la différence peut être rendue aussi petite que l'on voudra ; ce qui revient à dire que U est la limite commune vers laquelle tendent ces deux sommes ; on peut donc écrire, par exemple,

$$U = \lim . \Sigma\, yh,$$

la caractéristique Σ représentant une somme de quantités analogues au produit yh écrit à sa droite.

Lorsqu'on passe à la limite, c'est-à-dire lorsque n devient infiniment grand, h devient infiniment petit ; et on peut le représenter par dx, puisque ce n'est autre chose alors que l'accroissement infiniment petit de l'abscisse. En même temps, on remplace la caractéristique Σ, qui se rapporte à une somme de quantités variant d'une manière discontinue, par la caractéristique $\int$, qui se rapporte à une somme de quantités variant d'une manière continue, ou par degrés infiniment petits.

Et, comme la somme Σ n'indiquait qu'une valeur approchée de l'aire AA′ B′ B, tandis que la somme $\int$ indique l'aire exacte, ou la *somme intégrale* des éléments de cette aire, on donne le nom d'*intégrale* à cette seconde somme. On écrit donc

$$(1) \qquad U = \int ydx,$$

égalité qu'on énonce : U *égale l'intégrale de* ydx.

Chacun des produits analogues à ydx est ce que l'on appelle un *élément* de l'intégrale.

Cette intégrale est dite *indéfinie*, lorsque l'on n'indique pas entre quelles limites elle est prise, c'est-à-dire lorsque l'on n'indique pas les abscisses extrêmes. Si l'on veut indiquer les limites, on écrit au bas du signe $\int$ l'abscisse répondant à la limite inférieure, et au haut de ce signe l'abscisse répondant à la limite supérieure ; si, par exemple, on veut indiquer que l'intégrale est prise depuis l'abscisse a jusqu'à l'abscisse x, on écrit

$$(2) \qquad U = \int_a^x ydx,$$

et l'intégrale est dite *définie*. Si l'intégrale est prise de AA′ à BB′, c'est-à-dire depuis l'abscisse a jusqu'à l'abscisse b, on écrit de même

$$(3) \qquad U = \int_a^b ydx,$$

ce qui s'énonce : U *égale l'intégrale de* a *à* b *de* ydx, ou U *égale somme de* a *à* b *de* ydx. L'intégrale définie prend dans ce cas une valeur particulière au lieu de conserver la forme générale représentée par (2).

Le calcul d'une intégrale définie est ce que l'on nomme une

quadrature, parce que cette intégrale exprime une aire, ou le carré équivalent à cette aire.

161. — Il s'agit maintenant de faire voir comment ce calcul peut être effectué.

Considérons d'abord l'aire AA′ PM limitée à l'ordonnée fixe AA′, et à une ordonnée quelconque MP ou y. Cette aire est évidemment une fonction de x ; car elle varie avec l'abscisse OP et prend une valeur déterminée pour chaque valeur attribuée à cette abscisse. Nous pouvons donc poser

$$U = F(x).$$

Le trapèze MPP′ M′ est l'accroissement ΔU de l'aire considérée. Mais ce trapèze est compris entre les rectangles MPP′ I et IIPP′ M′ ; si donc on désigne PP′ par Δx, on pourra écrire

$$y\,\Delta x < \Delta U < (y + \Delta y)\,\Delta x,$$

$y + \Delta y$ représentant l'ordonnée M′ P′. En divisant les trois membres par Δx, on a

$$y < \frac{\Delta U}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Si maintenant on fait tendre Δx vers zéro, il en sera de même de Δy, et le rapport $\frac{\Delta U}{\Delta x}$ tendra vers $F'(x)$; à la limite on aura donc

$$F'(x) = y \quad \text{ou} \quad F'(x) = f(x),$$

c'est-à-dire que *la fonction* f (x) *qui représente l'ordonnée est la dérivée de la fonction* F (x), *qui représente l'aire de la courbe*. En mettant donc pour y sa valeur dans la relation (1), il vient

$$(4) \qquad U = \int F'(x)\,dx.$$

On pourrait égaler le second membre à $F(x)$, qui est la valeur de U ; mais il y a ici une remarque importante à faire. On a vu que la dérivée d'une constante est nulle ; en sorte que si l'on ajoute une constante à une fonction quelconque, sa dérivée ne change pas. Lors donc que l'on remonte de la dérivée à la fonction primitive qui l'a produite, on doit, si l'on veut que le résultat ait toute la généralité désirable, ajouter à cette fonction une constante arbitraire. On devra donc écrire

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C, \tag{5}$$

C désignant une constante arbitraire. Cette constante se détermine quand on considère l'intégrale définie. Car si l'on prend, par exemple, pour limites de l'intégrale a et x et que l'on pose

$$\int_a^x F'(x)\,dx = F(x) + C,$$

l'intégrale devra s'annuler pour $x = a$, puisque alors l'aire U est réduite à zéro. Ceci exige qu'on ait

$$C = -F(a).$$

On doit donc écrire

$$\int_a^x F'(x)\,dx = F(x) - F(a). \tag{6}$$

Pour $x = b$, on aurait

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{7}$$

On voit que, pour obtenir l'aire cherchée, il faut *déterminer la fonction* F (x) *dont* f (x) *est la dérivée, y remplacer* x *par la limite supérieure, puis par la limite inférieure, et retrancher le second résultat du premier.*

REMARQUE. Dans le raisonnement que nous avons fait pour trouver la limite de $\frac{\Delta U}{\Delta x}$, nous avons supposé l'ordonnée croissante ; si elle était décroissante, ces raisonnements subsisteraient encore ; il n'y aurait de changé que le sens des inégalités.

162. — Les équations (6) et (7) constituent un théorème de calcul qui est indépendant de toute considération géométrique. Car si l'on donne une fonction dérivée quelconque $F'(x)$, en la supposant continue, on peut toujours la prendre pour l'ordonnée d'une courbe, et poser

$$y = F'(x) \; ;$$

dès lors le premier membre de l'équation (7) représentera l'aire de cette courbe, depuis l'abscisse a jusqu'à l'abscisse b ; et l'équation (7) montre elle-même comment cette aire pourra être calculée. On peut donc dire, sans avoir égard aux considérations géométriques : *si* F'(x) *désigne la dérivée d'une fonction continue, la limite vers laquelle tend la somme des produits* F'(x).dx, *quand on y fait varier* x *d'une manière continue depuis une valeur* a *jusqu'à la valeur* b, *s'obtient en cherchant la fonction dont* F'(x) *est la dérivée, remplaçant dans cette fonction la variable* x *par la limite supérieure* b *de* x, *puis par sa limite inférieure* a, *et retranchant le second résultat du premier*. On verra que ce théorème trouve des applications fréquentes. C'est le *théorème fondamental* du calcul intégral ; et l'on aperçoit que ce calcul est l'inverse du calcul différentiel puisqu'il consiste à remonter à une fonction dont on a la dérivée.

Remonter ainsi de la dérivée à une fonction est ce que l'on appelle *intégrer* cette dérivée ; cette locution est abrégée ; elle signifie qu'il faut préalablement multiplier cette dérivée par dx, et chercher la limite vers laquelle tend la somme des

produits analogues quand on fait varier x d'une manière continue entre des limites données.

Remarque. Tout ce qui précède suppose que la fonction $f(x)$ ou $F'(x)$ conserve une valeur finie depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$. On peut avoir à considérer des limites infinies, et, dans ce cas, il peut se faire que la fonction $f(x)$ croisse indéfiniment à mesure que x augmente en valeur absolue; l'intégrale se compose alors d'éléments qui croissent indéfiniment eux-mêmes. Néanmoins, il peut arriver que cette intégrale conserve une valeur finie; on en verra des exemples plus loin.

163. — Afin de donner sur-le-champ un exemple de ce genre de calcul, supposons qu'il s'agisse de trouver l'aire comprise entre la courbe $y=3x^2$, l'axe des x, et les ordonnées répondant aux abscisses 1 et 3. En appelant U cette aire, on aura

$$U=\int_1^3 3x^2\,dx.$$

Il s'agit donc de trouver la fonction dont $3x^2$ est la dérivée; il est aisé de voir que c'est x^3. Si, dans cette fonction x^3, on remplace x par 3, on obtient 27; si l'on remplace x par 1, on obtient 1; le résultat est donc 27 — 1 ou 26. Ainsi

$$\int_1^3 3x^2\,dx=26.$$

164. — Avant d'aller plus loin, il y a quelques remarques utiles à faire.

I. Nous avons supposé jusqu'ici les axes rectangulaires; s'ils faisaient entre eux un angle θ différent de 90°, les rectangles élémentaires, tels que yh, seraient remplacés par des parallélogrammes ayant pour mesure $yh\sin\theta$. On aurait donc

$$U=\lim.\Sigma\, yh\sin\theta=\sin\theta\,.\lim\Sigma\, yh$$

ou

$$U = \sin \theta \int y\, dx,$$

c'est-à-dire qu'il suffirait de multiplier par $\sin \theta$ l'expression précédemment obtenue pour l'aire de la courbe.

II. *Une intégrale peut avoir des éléments négatifs.* Soit, par exemple, la courbe ABMCD, qui coupe deux fois l'axe des x; l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x, et les ordonnées AO et DD', présente une partie BMC, située au-dessous de l'axe des x. Dans cette partie de la courbe, l'ordonnée étant négative, on regarde l'aire de cette portion de courbe comme négative elle-même.

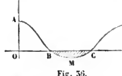


Fig. 36.

S'il arrivait que la partie négative fût égale en valeur absolue à la partie positive, l'aire totale serait regardée comme nulle.

III. *Les signes* $\int$ *et* d *représentant des opérations inverses, se détruisent lorsqu'ils se superposent.* Ainsi $\int du = u$, sauf la constante arbitraire. Ainsi encore

$$d\,.\int f'(x)\, dx = f'(x)\, dx.$$

IV. On a vu que l'on a généralement

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

On convient d'écrire de même

$$\int_b^a f'(x)\, dx = f(a) - f(b),$$

d'où il résulte

$$\int_b^a f'(x)\,dx = -\int_a^b f'(x)\,dx,$$

c'est-à-dire que *l'on change le signe d'une intégrale en intervertissant ses limites*. Cette convention est quelquefois commode.

II. — INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES.

§ I. — PRINCIPES ET PROCÉDÉS D'INTÉGRATION

165. — I. *Lorsque la quantité placée sous le signe* $\int$ *est affectée d'un facteur constant, ce facteur peut être mis hors du signe.* Soit, par exemple, l'expression

$$\int A f(x)\,dx. \tag{1}$$

Le facteur A affectant tous les éléments de l'intégrale est un facteur commun à tous les termes d'une somme, et peut, par conséquent, être mis en évidence; on peut donc écrire

$$A\int f(x)\,dx. \tag{2}$$

Réciproquement : *lorsqu'un facteur commun est placé devant le signe d'intégration, on peut le faire passer sous le signe.* Dans l'expression (2), par exemple, le facteur A affecte une somme; on peut donc effectuer la multiplication, ce qui revient à affecter du facteur A chacun des termes de la somme, et peut s'écrire sous la forme (1).

166. — II. *L'intégrale d'une somme de différentielles est égale à la somme des intégrales de ces différentielles.*

Soit, par exemple, l'expression

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\, dx.$$

Elle revient à la somme des quantités suivantes (162) :

$$\begin{aligned} &f(a)\, dx + \varphi(a)\, dx \\ &+ f(a + dx)\, dx + \varphi(a + dx)\, dx \\ &+ f(a + 2\, dx)\, dx + \varphi(a + 2\, dx)\, dx \\ &+ f(a + 3\, dx)\, dx + \varphi(a + 3\, dx)\, dx \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ f[a + (n-1)\, dx]\, dx + \varphi[a + (n-1)\, dx]\, dx, \end{aligned}$$

en supposant $b = a + n\,dx$. Or la somme des termes qui forment la première colonne est égale à $\int_a^b f(x)\, dx$, et la somme des termes qui forment la seconde colonne est égale à $\int_a^b \varphi(x)\, dx$. On peut donc écrire

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

On étendrait sans peine la démonstration à la somme d'un nombre quelconque de différentielles.

167. — III. *L'intégrale de la différence de deux différentielles est égale à la différence entre les intégrales de ces différentielles.* C'est-à-dire que l'on a

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

La démonstration est la même qu'au numéro précédent; il suffit de remplacer les signes + qui séparaient les deux termes de chaque élément de l'intégrale proposée par des signes —.

Il résulte de cette proposition et de la précédente que *l'intégrale de la somme algébrique d'autant de différentielles qu'on voudra est égale à la somme algébrique des intégrales de ces différentielles.* Ces intégrales se trouvent ainsi affectées des mêmes signes que les différents termes d'un même élément de l'intégrale proposée. On aurait, par exemple,

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b \varphi(x)\, dx - \int_a^b \psi(x)\, dx.$$

168. — On a vu, dans le calcul différentiel, qu'il existe une règle générale pour la différentiation des fonctions (13). Il n'existe malheureusement pas de règle générale analogue pour l'intégration des différentielles. Si l'expression qui est sous le signe $\int$ est une différentielle connue, l'intégration se trouve immédiatement effectuée; si cela n'a pas lieu, on peut, en employant divers procédés, chercher à ramener l'expression donnée à une différentielle connue; mais on ne peut pas toujours être certain à l'avance qu'un de ces procédés réussira.

Ces procédés sont au nombre de trois. Le plus simple consiste à *multiplier et diviser par un facteur constant* convenablement choisi.

Soit, par exemple, l'intégrale $\int x^m\, dx$.

Telle qu'elle se présente, l'expression sous le signe $\int$ n'est pas une différentielle connue; mais on voit aisément qu'on la ramènerait à une différentielle connue en multipliant sous le signe par $m+1$; car $(m+1)\, x^m\, dx$ est la différentielle de x^{m+1}. Or on peut effectuer cette multiplication sous le signe, à la condition de diviser par $m+1$ hors du signe (165), car

ce sont deux opérations contraires effectuées sur l'intégrale proposée. On peut donc écrire

$$\int x^m\,dx = \frac{1}{m+1}\int (m+1)\,x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,$$

en ajoutant une constante arbitraire C si les limites de l'intégrale ne sont pas indiquées.

Soit encore l'expression $\int a^x\,dx$.

La quantité sous le signe $\int$ n'est pas une différentielle connue, mais elle deviendrait une différentielle connue si elle était multipliée par $\frac{\log a}{\log e}$. Or on peut effectuer cette multiplication sous le signe, à la condition de multiplier hors du signe par la quantité inverse $\frac{\log e}{\log a}$; on aura donc

$$\int a^x\,dx = \frac{\log e}{\log a}\int \frac{\log a}{\log e}\,a^x\,dx = \frac{\log e}{\log a}.\,a^x + C.$$

169. — Le second procédé d'intégration consiste à *changer de variable*, c'est-à-dire à établir entre la variable qui figure sous le signe $\int$ et une variable auxiliaire une relation telle qu'en remplaçant la variable donnée par sa valeur tirée de cette relation, l'expression placée sous le signe d'intégration se change en une différentielle connue.

Soit, par exemple, l'expression $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

La quantité placée sous le signe $\int$ n'est pas une différentielle connue; mais si l'on pose $x = au$, d'où $dx = a\,du$, et

qu'on fasse la substitution, on trouve

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\,du}{\sqrt{a^2-a^2u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{arc.sin}\, u + C,$$

ou, en remettant pour u sa valeur $\frac{x}{a}$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc.sin}\,\frac{x}{a} + C.$$

Soit encore l'expression $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

La quantité placée sous le signe n'est pas une différentielle connue; mais si l'on pose $x=\frac{1}{u}$, d'où $dx = -\frac{du}{u^2}$ et qu'on substitue, on trouve

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}} = \int \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$= \text{arc.cos}\, y + C,$$

ou, en remettant pour y sa valeur $\frac{1}{x}$,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc.cos}\,\frac{1}{x} + C.$$

120. — Le troisième procédé est connu sous le nom d'*intégration par parties*, locution inexacte mais consacrée. On sait que si u et v sont deux fonctions d'une même variable x, on a (21)

$$d\,.\,uv = u\,dv + v\,du.$$

On en tire

$$u\,dv = d\,.\,uv - v\,du.$$

Les deux membres de cette égalité étant deux différentielles égales, si on les intègre entre les mêmes limites, les résultats seront égaux, puisque les deux intégrales obtenues se composeront d'un même nombre d'éléments égaux chacun à chacun. On peut donc écrire

$$\int u dv = \int d . uv - \int v du,$$

ou, attendu que les signes $\int$ et d se détruisent quand ils se superposent,

$$(1) \qquad \int u dv = uv - \int v du.$$

C'est sur cette relation que se fonde le procédé d'intégration par parties. Elle exprime que *si l'on a sous le signe* $\int$ *un produit de deux facteurs* u *et* dv, *dont l'un* dv *est une différentielle connue, l'intégrale de ce produit est égale au premier facteur* u, *multiplié par l'intégrale* v *du second, diminué d'une seconde intégrale dans laquelle il y a sous le signe* $\int$ *l'intégrale* v *qu'on vient d'obtenir, multipliée par la différentielle* du *du facteur qui n'avait pas été touché.*

Soit, par exemple, l'expression

$$\int x e^x dx,$$

on trouvera, en appliquant cette règle,

$$\int x e^x dx = x . e^x - \int e^x . dx = x e^x - e^x + C.$$

Il arrive dans ce cas que l'intégration proposée est ramenée à l'intégration d'une différentielle connue.

Soit encore l'expression

$$\int \text{arc tang}\, x\,.\,dx,$$

on trouvera de même

$$\int \text{arc tang}\, x\,.\,dx = \text{arc tang}\, x\,.\,x - \int x\,.\,\frac{dx}{1+x^2},$$

ce qu'on peut écrire

$$\int \text{arc tang}\, x\,.\,dx = x\ \text{arc tang}\, x - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2}.$$

L'intégration proposée se trouve ainsi ramenée à une intégration plus facile. Car si l'on examine la quantité placée sous le second signe $\int$, on reconnaît que le numérateur $2xdx$ est la différentielle du dénominateur $1+x^2$; cette quantité est donc de la forme $\frac{du}{u}$, qui est la différentielle du logarithme népérien de u ; on a donc ici

$$\int \text{arc tang}\, x\,.\,dx = x\,.\,\text{arc tang}\, x - \frac{1}{2}\log'(1+x^2) + C,$$

en ajoutant toujours une constante arbitraire si les limites de l'intégrale ne sont pas indiquées.

L'habitude du calcul peut seule suggérer le choix à faire dans chaque cas entre les procédés que nous venons d'exposer; et il est utile de répéter qu'on ne peut pas toujours être assuré d'avance qu'on réussira à effectuer l'intégration proposée en employant un ou plusieurs de ces procédés.

§ 2. — INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES LES PLUS USITÉES.

171. — *Différentielles algébriques entières.* — Considérons d'abord la différentielle monome $Ax^m dx$. Pour l'intégrer, on

emploiera le procédé du n° 168, c'est-à-dire qu'on multipliera par $m+1$, sauf à diviser l'intégrale par ce facteur ; on aura ainsi (165, 168)

$$\int Ax^m dx = \frac{A}{m+1}\int (m+1)x^m dx = \frac{Ax^{m+1}}{m+1} + \text{const.}$$

On voit que la règle à suivre consiste *à augmenter l'exposant de* x *d'une unité, et à diviser par cet exposant ainsi augmenté.* On trouvera ainsi

$$\int 10x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{10x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \text{const} = 6x^{\frac{5}{3}} + \text{const.}$$

Remarque. La règle est en défaut pour $m = -1$, parce que le dénominateur $m+1$ devient nul. Mais, dans ce cas, l'expression placée sous le signe $\int$ est une différentielle connue, celle du logarithme népérien de x, car on a

$$\int Ax^{-1}dx = A\int \frac{dx}{x} = A \log' x + \text{const.}$$

172. — Supposons maintenant que la différentielle soit polynome. En combinant la règle ci-dessus avec le principe du n° 166, on trouve aisément

$$\int (Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Tx + U)\,dx = \frac{Ax^{m+1}}{m+1} + \frac{Bx^m}{m} + \ldots + \frac{Tx^2}{2} + Ux + \text{const.}$$

Par exemple,

$$\int (x^4 - 3x^2 + 6x - 7)\,dx = \frac{x^5}{5} - x^3 + 3x^2 - 7x + \text{const.}$$

173. — *Différentielles algébriques fractionnaires*. On peut ne considérer que le cas où le numérateur est d'un degré inférieur à celui du dénominateur ; car, s'il en était autrement, on pourrait effectuer la division ; le quotient se composerait d'une partie entière et d'une fraction ayant pour numérateur le diviseur, c'est-à-dire un polynome de degré moindre que le dénominateur proposé.

Supposons d'abord que le dénominateur soit du premier degré ; et soit

$$\frac{A dx}{mx+n}$$

la différentielle proposée. On multiplie le numérateur par m, et l'on divise l'intégrale par ce même facteur ; on a ainsi

$$\int \frac{A dx}{mx+n} = \frac{A}{m} \int \frac{m dx}{mx+n}.$$

Mais alors le numérateur de l'expression placée sous le signe d'intégration est la différentielle du dénominateur ; cette expression est donc de la forme $\frac{du}{u}$, qui est la différentielle du logarithme népérien de u. On a donc

$$\int \frac{A dx}{mx+n} = \frac{A}{m} \log'(mx+n) + \text{const.}$$

Par exemple,

$$\int \frac{3dx}{4x-1} = \frac{3}{4} \log'(4x-1) + \text{const.}$$

174. — Supposons, en second lieu, que le dénominateur soit du second degré, le numérateur sera au plus du premier, et la différentielle donnée sera de la forme

$$\frac{(mx+n)\, dx}{ax^2+bx+c}.$$

Il y a lieu de distinguer trois cas, suivant que les racines du trinome placé en dénominateur sont réelles et inégales, réelles et égales, ou imaginaires.

I. — Considérons d'abord le cas où ces racines sont réelles et inégales; en les désignant par α et β, on pourra écrire le dénominateur sous la forme

$$a(x-\alpha)(x-\beta).$$

La méthode consiste à poser

$$(1) \qquad \frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta},$$

et à déterminer A et B de manière que cette relation ait lieu quel que soit x. En chassant les dénominateurs, elle devient

$$mx+n=A(x-\beta)+B(x-\alpha).$$

Cette relation devant avoir lieu identiquement, on peut y faire successivement

$$x=\alpha \quad \text{et} \quad x=\beta,$$

ce qui donne

$$m\alpha+n=A(\alpha-\beta), \quad \text{d'où} \quad A=\frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta},$$

et

$$m\beta+n=B(\beta-\alpha), \quad \text{d'où} \quad B=-\frac{m\beta+n}{\alpha-\beta},$$

en supposant $\alpha>\beta$.

Les coefficients A et B étant ainsi déterminés, on aura, en vertu de la relation (1),

$$\int\frac{(mx+n)\,dx}{a(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{A}{a}\int\frac{dx}{x-\alpha}+\frac{B}{a}\int\frac{dx}{x-\beta}$$
$$=\frac{A}{a}\log'(x-\alpha)+\frac{B}{a}\log'(x-\beta)+\text{const.}$$

Par exemple, on trouvera en suivant cette marche

$$\int \frac{(4x+1)\,dx}{3x^2-15x+18} = \frac{13}{3}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{9}{3}\int \frac{dx}{x-2}$$
$$= \frac{13}{3}\log'(x-3) - \frac{9}{3}\log'(x-2) + \text{const.}$$

On traitera de même l'exemple suivant, qui se rencontre dans les applications :

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a+x} + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a-x}$$
$$= \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a+x} - \frac{1}{2a}\int \frac{-dx}{a-x}$$
$$= \frac{1}{2a}\log'(a+x) - \frac{1}{2a}\log'(a-x) + \text{const.}$$
$$= \frac{1}{2a}\log'\frac{a+x}{a-x} + \text{const.}$$

II. — Si les racines du trinome placé en dénominateur sont réelles et égales, la différentielle proposée peut s'écrire $\frac{(mx+n)\,dx}{a\,(x-\alpha)^2}$, en appelant α la racine double. La méthode consiste alors à changer de variable en posant

$$x-\alpha = u, \quad \text{d'où} \quad dx = du.$$

On a ainsi

$$\int \frac{(mx+n)\,dx}{a\,(x-\alpha)^2} = \int \frac{(mu+m\alpha+n)\,du}{au^2}$$
$$= \frac{m}{a}\int \frac{du}{u} + \frac{m\alpha+n}{a}\int \frac{du}{u^2}$$
$$= \frac{m}{a}\log'.u - \frac{m\alpha+n}{a}\cdot\frac{1}{u} + \text{const.}$$
$$= \frac{m}{a}\log'(x-\alpha) - \frac{m\alpha+n}{a}\cdot\frac{1}{x-\alpha} + \text{cons}^{t}.$$

On trouvera, par exemple, ainsi

$$\int \frac{(4x+1)\,dx}{3(x-2)^2} = \frac{4}{3}\log'(x-2) + 3 \cdot \frac{1}{x-2} + \text{const.}$$

III. Nous supposerons enfin que les racines du trinome en dénominateur soient imaginaires. On sait que dans ce cas le trinome peut se mettre sous la forme

$$a\,[(x-\alpha)^2 + \beta^2].$$

La méthode consiste à poser $x - \alpha = \beta u$, d'où $dx = \beta du$; en substituant, on obtient

$$\int \frac{(mx+n)\,dx}{a\,[(x-\alpha)^2+\beta^2]} = \int \frac{(m\beta u + m\alpha + n)\,\beta du}{a\,(\beta^2 u^2 + \beta^2)} = \frac{m}{a}\int \frac{u du}{u^2+1}$$
$$+ \frac{m\alpha + n}{a\beta}\int \frac{du}{u^2+1}.$$

La différentielle placée sous le second signe $\int$ est une différentielle connue; on ramène celle qui est sous le premier signe $\int$ à une différentielle connue en multipliant par 2 sous le signe et en divisant par 2 hors du signe; car on a alors sous le signe d'intégration l'expression $\frac{2u du}{u^2+1}$ dont le numérateur est la différentielle du dénominateur, et qui a par conséquent pour intégrale le logarithme népérien de ce dénominateur; on trouve ainsi

$$\int \frac{(mx+n)\,dx}{a\,[(x-\alpha)^2+\beta^2]} = \frac{m}{2a}\log'(u^2+1)$$
$$+ \frac{m\alpha+n}{a\beta}\,\text{arc tang}\, u + \text{const} = \frac{m}{2a}\log'\left[\frac{(x-\alpha)^2}{\beta^2} + 1\right]$$
$$+ \frac{m\alpha+n}{a\beta}\,\text{arc tang}\,.\frac{x-\alpha}{\beta} + \text{const.}$$

Par exemple, on obtient ainsi

$$\int \frac{(4x+1)\,dx}{3x^2-30x+87} = \frac{2}{3}\log'\left[\frac{(x-5)^2}{4}+1\right]$$
$$+\frac{7}{2}\cdot\text{arc tang}\,\frac{x-5}{2}+\text{const.}$$

175. — On peut concevoir que l'on suive une marche analogue quand le dénominateur de la fraction est d'un degré quelconque. L'algèbre fournit des méthodes pour décomposer les fractions rationnelles en fractions simples ; on peut donc, théoriquement du moins, ramener ainsi l'intégration d'une différentielle fractionnaire rationnelle, dont le dénominateur est un polynome en x de degré quelconque, à l'intégration de plusieurs différentielles fractionnaires plus simples. Mais cela suppose qu'on puisse trouver les racines d'une équation de degré quelconque, ce qu'on ne sait pas faire. Nous ne croyons donc pas utile pour les applications de développer ici cette méthode générale ; nous nous contenterons de traiter les exemples suivants, où le dénominateur est du troisième degré.

I. Supposons d'abord que la différentielle proposée soit

$$\frac{(x^2-5x+3)\,dx}{(x+1)(x-1)(x-2)}.$$

Nous poserons

$$\frac{x^2-5x+3}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2},$$

ou

$$x^2-5x+3 = A(x-1)(x-2)+B(x+1)(x-2)$$
$$+C(x+1)(x-1).$$

En faisant successivement $x=-1$, $x=+1$, $x=+2$,

on trouvera

$$9=6A, \quad \text{d'où} \quad A=\frac{3}{2},$$
$$-1=-2B, \quad \text{d'où} \quad B=\frac{1}{2},$$
$$-3=3C, \quad \text{d'où} \quad C=-1.$$

Par conséquent, on pourra écrire

$$\int\frac{(x^2-5x+3)\,dx}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}$$
$$-\int\frac{dx}{x-2}=\frac{3}{2}\log'(x+1)+\frac{1}{2}\log'(x-1)$$
$$-\log'(x-2)+\text{const.}$$

II. La méthode que nous venons d'employer est en défaut lorsque deux racines du dénominateur sont égales.

Supposons, en effet, qu'on ait à considérer la fraction $\frac{mx^2+nx+p}{(x-a)(x-b)^2}$ et qu'on pose

$$\frac{mx^2+nx+p}{(x-a)(x-b)^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-b};$$

en chassant les dénominateurs on obtient

$$mx^2+nx+p=A(x-b)^2+(B+C)(x-a)(x-b),$$

relation qui ne saurait être une identité, puisque le second membre s'annule pour $x=b$, tandis que le premier ne contient pas le facteur $x-b$, si la fraction proposée a été réduite à sa plus simple expression, ce qu'on peut toujours supposer.

Dans ce cas, au lieu de décomposer la fraction proposée en trois fractions dont les dénominateurs soient du premier degré, on la décompose en deux fractions seulement, l'une ayant un dénominateur du premier degré $(x-a)$, l'autre un dénominateur du second degré $(x-b)^2$.

Soit par exemple à intégrer $\frac{(x^2-5x+3)\,dx}{(x+1)(x-2)^2}$; on posera

$$\frac{x^2-5x+3}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{(x-2)^2},$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$x^2-5x+3=A(x-2)^2+(Bx+C)(x+1);$$

et l'on déterminera les coefficients A, B, C en donnant à x trois valeurs distinctes, par exemple $x=-1$, $x=2$ et $x=0$; on trouve ainsi :

$$\begin{array}{ll} \text{pour } x=-1, & 9=9A, \text{ d'où } A=1; \\ \text{pour } x=2, & -3=3(2B+C); \\ \text{pour } x=0, & +3=4A+C; \end{array}$$

les deux dernières donnent $C=-1$, et $B=0$.

On aura donc

$$\int\frac{(x^2-5x+3)\,dx}{(x+1)(x-2)^2}=\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x-2)^2}$$
$$=\log'(x+1)+\frac{1}{(x-2)}+\text{const.}$$

III. On emploie encore le même ordre de décomposition quand le dénominateur a deux racines imaginaires. Soit, par exemple, à intégrer $\frac{(x^2-5x+3)\,dx}{(x+1)[(x-1)^2+4]}$; on posera

$$\frac{x^2-5x+3}{(x+1)[(x-1)^2+4]}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{[(x-1)^2+4]}$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$x^2-5x+3=A[(x-1)^2+4]+(Bx+C)(x+1),$$

et l'on fera successivement $x=-1$, $x=0$, $x=+1$; on

trouvera ainsi

pour $x=-1$, $9=8A$, d'où $A=\frac{9}{8}$;

pour $x=0$, $3=5A+C$, d'où $C=3-5A=-\frac{21}{8}$;

pour $x=1$, $-1=4A+(B+C)2$,

d'où $B=-\frac{1}{2}-2A-C=-\frac{1}{8}$.

On aura donc

$$\int\frac{(x^2-5x+3)\,dx}{(x+1)[(x-1)^2+4]}=\frac{9}{8}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{8}\int\frac{(x+21)\,dx}{[(x-1)^2+4]}.$$

La première intégrale du second membre a pour valeur $\log'(x+1)$; la seconde, traitée par la méthode du n° 174, III, donne $\frac{1}{2}\log'\left[\frac{(x-1)^2}{4}+1\right]+11$ arc tang $\frac{x-1}{2}$; il vient donc enfin

$$\int\frac{(x^2-5x+3)\,dx}{(x+1)[(x-1)^2+4]}=\frac{9}{8}\log'(x+1)$$
$$-\frac{1}{16}\log'\left[\frac{(x^2-1)^2}{4}+1\right]-\frac{11}{8}\text{arc tang}\,\frac{x-1}{2}+\text{const.}$$

IV. Nous supposerons enfin que le dénominateur ait ses trois racines égales et qu'on ait à intégrer, par exemple,

$$\frac{(x^2-5x+3)\,dx}{(x-2)^3}.$$

On posera $x-2=u$, d'où $dx=du$; et en faisant la substitution il viendra

$$\frac{(u^2-u-3)\,du}{u^3}\quad\text{ou}\quad\frac{du}{u}-\frac{du}{u^2}-3\frac{du}{u^3}.$$

La première de ces trois différentielles a pour intégrale $\log' u$,

la seconde $\frac{1}{u}$, la troisième, qui revient à $-3u^{-3}du$, a pour intégrale $+\frac{3}{2}u^{-2}$ ou $\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{u^2}$. On a donc

$$\int\frac{(x^2-5x+5)\,dx}{(x-2)^3}=\log'(x-2)$$
$$+\frac{1}{x-2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}+\text{const}.$$

176. *Différentielles irrationnelles du second degré.* I. On sait que l'expression $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ est la différentielle de l'arc dont le sinus est x; on a donc immédiatement

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc}\sin x+\text{const}.$$

II. Soit maintenant l'expression $dx\sqrt{1-x^2}$; pour l'intégrer, on commence par multiplier et diviser par $\sqrt{1-x^2}$, ce qui donne $\frac{(1-x^2)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, et par conséquent

$$(1)\qquad \int dx\sqrt{1-x^2}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La première intégrale du second membre est connue. La seconde peut être mise sous la forme $+\int x.\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; on a ainsi sous le signe $\int$ deux facteurs dont l'un, le second, est une différentielle connue, car c'est celle de $\sqrt{1-x^2}$ (56). Si donc on applique à cette intégrale le procédé de l'intégration par parties (170), on aura

$$(2)\qquad +\int x.\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=x\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}.dx,$$

Substituant cette valeur dans la relation (1), on obtient

$$\int dx\sqrt{1-x^2} = \text{arc sin}\, x + x\sqrt{1-x^2} - \int dx\sqrt{1-x^2}.$$

On voit qu'on a ainsi reproduit en signe contraire dans le second membre l'intégrale qu'il s'agissait d'obtenir ; si on la fait passer dans le premier membre, celui-ci se trouvera donc doublé, et, en divisant par 2, on obtiendra finalement

$$\int dx\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\text{arc sin}\, x + x\sqrt{1-x^2}\right] + \text{const.}$$

177. — III. Pour intégrer $\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ on change de variable, et l'on pose

$$(1) \qquad \sqrt{1+x^2} = u - x.$$

Élevant au carré et réduisant, on obtient

$$1 = u^2 - 2ux,$$

et, en différentiant et divisant par 2,

$$0 = u\,du - u\,dx - x\,du, \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{u-x} = \frac{du}{u},$$

ou, ce qui revient au même en vertu de la relation (1),

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{du}{u}.$$

On peut donc écrire

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{du}{u} = \log' u + \text{const}$$
$$= \log'\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \text{const.}$$

On intégrerait de la même manière $\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$, et l'on aurait

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \log'\left(x+\sqrt{x^2+k}\right) + \text{const.}$$

IV. Soit maintenant à intégrer $dx\sqrt{1+x^2}$; on commencera par multiplier et diviser par $\sqrt{1+x^2}$, ce qui donne $\frac{(1+x^2)dx}{\sqrt{1+x^2}}$. On a donc

$$(2) \qquad \int dx\sqrt{1+x^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

La première intégrale du second membre est conne; la seconde peut s'écrire

$$\int x \cdot \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}};$$

la quantité sous le signe $\int$ est alors un produit de deux facteurs, dont le second est la différentielle de $\sqrt{1+x^2}$; on a donc, en appliquant le procédé de l'intégration par parties,

$$\int x \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,.\,dx;$$

et, en substituant dans la relation (2),

$$\int dx\sqrt{1+x^2} = \log'\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,.\,dx.$$

Le dernier terme du second membre est alors le premier membre changé de signe. Si on le fait passer dans le premier membre, et qu'on divise par 2, il viendra donc

$$\int dx\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}\left[\log'\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+x\sqrt{1+x^2}\right]+\text{const.}$$

On intégrerait de même $dx\sqrt{x^2+k}$, et l'on trouverait

$$\int dx\sqrt{x^2+k}=\frac{1}{2}\left[k\log'\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)+x\sqrt{x^2+k}\right]+\text{const.}$$

Mais si l'on avait à intégrer $dx\sqrt{x^2-k}$, on aurait

$$\int dx\sqrt{x^2-k}=\frac{1}{2}\left[-k\log'\left(x+\sqrt{x^2-k}\right)+x\sqrt{x^2-k}\right].$$

Ce résultat ne diffère du précédent, comme on pouvait s'y attendre, qu'en ce que k est changé en $-k$.

178. — V. Si, dans les exemples qui précèdent, le radical portait sur un trinome du second degré, ce cas pourrait être ramené aux précédents ; mais les résultats seraient de nature différente, selon que le terme en x^2 serait affecté d'un coefficient positif ou négatif.

Supposons-le d'abord négatif, et soit $c+bx-ax^2$ le trinome placé sous le radical. Ce trinome pourra s'écrire

$$a\left(\frac{c}{a}+\frac{b}{a}x-x^2\right),$$

ou, en ajoutant et retranchant dans la parenthèse $\frac{b^2}{4a^2}$,

$$a\left[\left(\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2\right],$$

quantité qui est de la forme

$$a\left[\beta^2-(x-\alpha)^2\right];$$

car on doit admettre que $\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$ est positif, autrement le radical serait imaginaire pour toutes les valeurs de x. On

pourra donc poser

$$x = \alpha + \beta u, \quad \text{d'où} \quad dx = \beta du;$$

et, en faisant la substitution, on donnera au trinome la forme $a\beta^2(1-u^2)$, et le radical portera sur $1-u^2$. On sera donc ramené aux cas traités au n° 176.

Soit, par exemple, à intégrer $\frac{dx}{\sqrt{7+6x-x^2}}$; en ajoutant et retranchant sous le radical le carré de la moitié du coefficient de x, c'est-à-dire 9, on pourra écrire $\frac{dx}{\sqrt{16-(x-3)^2}}$. On posera

$$x = 3 + 4u, \quad \text{d'où} \quad dx = 4du,$$

et l'on aura

$$\frac{4\,du}{\sqrt{16-16u^2}}, \quad \text{ou simplement} \quad \frac{du}{\sqrt{1-u^2}};$$

on aura donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7+6x-x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{arc.}\sin u + \text{const.}$$

$$= \text{arc.}\sin \frac{x-3}{4} + \text{const.}$$

Soit encore à intégrer

$$dx\sqrt{6x-x^2};$$

on pourra écrire

$$dx\sqrt{9-(x-3)^2}.$$

On posera donc

$$x = 3 + 3u, \quad \text{d'où} \quad dx = 3du,$$

et il viendra

$$3du\sqrt{9-9u^2}, \quad \text{ou} \quad 9du\sqrt{1-u^2}.$$

On aura donc

$$\int dx\sqrt{6x-x^2}=9\int du\sqrt{1-u^2}$$

$$=\frac{9}{2}\left[\arc\sin u+u\sqrt{1-u^2}\right]+\text{const.}$$

$$=\frac{9}{2}\left[\arc\sin\frac{x-3}{3}+\frac{x-3}{3}\sqrt{1-\frac{(x-3)^2}{9}}\right]+\text{const.}$$

$$=\frac{9}{2}\left[\arc\sin\frac{x-3}{3}+\frac{1}{9}(x-3)\sqrt{6x-x^2}\right]+\text{const.}$$

179. — VI. Supposons en second lieu que le coefficient de x^2 soit positif, et soit ax^2+bx+c le trinome. On pourra l'écrire

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right),$$

ou, en ajoutant et retranchant dans la parenthèse le terme $\frac{b^2}{4a^2}$,

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right],$$

quantité de la forme

$$a\left[(x-\alpha)^2\pm\beta^2\right].$$

On posera

$$x=\alpha\pm\beta u,\quad \text{d'où}\quad dx=\pm\beta du\,;$$

et, en substituant, le trinome deviendra

$$a\,(\beta^2u^2\pm\beta^2),\quad \text{ou}\quad a\beta^2\,(u^2\pm 1)\,;$$

et le radical portera sur $u^2\pm1$. On sera donc ramené aux cas traités au n° 177.

Soit, par exemple, à intégrer

$$\frac{(3x-2)\,dx}{\sqrt{4x^2-16x+20}}.$$

Le trinome sous le radical pourra s'écrire

$$4\,(x^2-4x+5),\quad \text{ou}\quad 4\,[(x-2)^2+1].$$

On posera donc

$$x=2+u,\quad \text{d'où}\quad dx=du\,;$$

et, en substituant dans la différentielle donnée, elle deviendra

$$\frac{(3u+4)\,du}{2\sqrt{u^2+1}}.$$

On aura donc

$$\int\frac{(3x-2)\,dx}{\sqrt{4x^2-16x+20}}=\frac{3}{2}\int\frac{u\,du}{\sqrt{u^2+1}}+2\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{u^2+1}+\log'\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)+u\sqrt{u^2+1}+\text{const}.$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{(x-2)^2+1}+\log'\left[(x-2)+\sqrt{(x-2)^2+1}\right]$$

$$+\,(x-2)\sqrt{(x-2)^2+1}+\text{const}.$$

$$=\log'\left[(x-2)+\sqrt{x^2-4x+5}\right]$$

$$+\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2-4x+5}+\text{const}.$$

180. — *Différentielles binomes.* On donne ce nom aux différentielles de la forme

(1) $$x^m(a+bx^n)^p\,.\,dx.$$

On peut remarquer d'abord que si p était un nombre entier, on pourrait développer le binome, et, en multipliant ses termes par $x^m dx$, on aurait une suite de différentielles de la

forme $Ax^q dx$ que l'on pourrait intégrer séparément. Nous n'avons donc à considérer que le cas où p n'est pas un nombre entier.

On ne diminue pas la généralité de l'expression (1), en supposant n positif, car si l'on avait

$$x^m \left(a + \frac{b}{x^n}\right)^p . dx,$$

on pourrait écrire, en multipliant par x^n dans la parenthèse et en divisant par x^{np} hors de la parenthèse, ce qui ne changerait pas le produit,

$$x^{m-np}(b + ax^n)^p dx,$$

expression qui est de même forme que la proposée, mais où l'exposant n est positif.

On ne diminue pas non plus la généralité de l'expression (1) en supposant m et n entiers. Supposons-les, en effet, de la forme $\frac{m}{r}$ et $\frac{n}{s}$, de telle sorte que la différentielle proposée soit

$$x^{\frac{m}{r}}\left(a + bx^{\frac{n}{s}}\right)^p dx.$$

On posera

$$x = u^{rs}, \quad \text{d'où} \quad dx = rsu^{rs-1}du;$$

et, en substituant, il viendra

$$rs . u^{ms}(a + b^{nr})^p . u^{rs-1} . du,$$

expression qui, au facteur constant près rs, est de même forme que la proposée, avec cette seule différence que les exposants ms et nr sont entiers.

En définitive, on voit que dans la différentielle binome (1) il est permis de regarder m et n comme entiers, et n comme positif.

181. — Nous avons vu que la différentielle binome est in-

tégrable dans le cas de p entier. Elle l'est encore dans deux autres cas. 1° Posons, en effet,

$$a + bx^n = u,$$

d'où

$$x = \left(\frac{u-a}{b}\right)^n, \quad \text{et} \quad dx = \frac{1}{n}\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}.\frac{du}{b}.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression proposée, on obtient

$$\frac{1}{nb}.u^p.\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}.du,$$

et l'on voit que cette différentielle serait intégrable si $\frac{m+1}{n}$ était un nombre entier et positif.

2° La différentielle binome peut s'écrire $x^{m+np}.(b+ax^{-n})^p dx$. Si on opère sur cette quantité comme nous venons de le faire, on obtient la condition d'intégrabilité en remplaçant m par $m+np$ et n par $-n$. On trouve aussi que l'expression est intégrable si la quantité

$$-\frac{m+pn+1}{n}, \quad \text{ou} \quad -\left(\frac{m+1}{n}+p\right)$$

est un nombre entier et positif.

Dans tous les autres cas, la différentielle binome ne peu être intégrée à l'aide des fonctions algébriques et logarithmiques. On se propose ordinairement alors de ramener son intégration à celle d'une différentielle de même forme dans laquelle les exposants m et p soient les plus petits possible en valeur absolue.

182. — Si l'on écrit la différentielle binome sous la forme

$$(a+bx^n)^p.x^m dx,$$

on voit qu'elle est le produit de deux facteurs, dont l'un $x^m dx$

est une différentielle connue; on peut donc appliquer le procédé de l'intégration par parties, et l'on aura

$$(2)\qquad \int (a+bx^n)^p . x^m dx = (a+bx^n)^p . \frac{x^{m+1}}{m+1} - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} . pbn\,(a+bx^n)^{p-1} . x^{n-1} dx.$$
$$= \frac{(a+bx^n)^p x^{m+1}}{m+1} - \frac{p\,bn}{m+1} \int x^{m+n}\,(a+bx^n)^{p-1} . dx.$$

La différentielle binome placée sous le signe $\int$ dans le second membre est de même forme que la proposée ; elle en diffère en ce que p est remplacée par $p-1$ et m par $m+n$. Mais on peut déduire de la formule (2) une autre formule qui ramène l'intégration de la différentielle proposée à celle d'une différentielle de même forme, dans laquelle m conserve sa valeur, et p est remplacé par $p-1$. Pour cela, on observe qu'on a

$$bx^{m+n} = x^m\,(a+bx^n) - ax^m.$$

Si l'on substitue cette valeur dans (2), on obtient

$$\int (a+bx^n)^p . x^m dx = \frac{(a+bx^n)^p . x^{m+1}}{m+1} - \frac{pn}{m+1} \int (a+bx^n)^p x^m dx + \frac{pna}{m+1} \int x^m\,(a+bx^n)^{p-1} dx,$$

et, si l'on passe le terme affecté du signe — dans le premier membre, on en tire après réduction

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} \int (a+bx^n)^p x^m dx &= \frac{(a+bx^n)^p x^{m+1}}{m+1+pn} \\ &+ \frac{pna}{m+1+pn} \int x^m\,(a+bx^n)^{p-1} dx. \end{aligned} \right.$$

On peut renverser cette formule, c'est-à-dire en tirer la valeur de l'intégrale qui figure dans le second membre. Si l'on fait ce calcul, et que l'on change ensuite p en $p+1$, on obtient

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \int (a+bx^n)^p . x^m dx = & -\frac{(a+bx^n)^{p+1} . x^{m+1}}{(p+1)\, n\, a} \\ & + \frac{m+1+n(p+1)}{(p+1)\, n\, a} \int (a+bx^n)^{p+1} . x^m dx. \end{aligned} \right.$$

Les formules (3) ou (4) serviront, quel que soit le signe de p, à ramener l'intégrale proposée à une autre de même forme, où, m restant le même, la valeur absolue de p aura été diminuée d'une unité. Et, en répétant un nombre de fois suffisant cette opération, on ramènera l'exposant de p à avoir pour valeur absolue une fraction.

183. — La différentielle proposée peut être décomposée d'une autre manière en deux facteurs dont l'un soit une différentielle connue. Multiplions et divisons, en effet, par la dérivée de bx^n, c'est-à-dire par nbx^{n-1} ; nous pourrons écrire

$$\frac{1}{bn} . x^{m-n+1} . (a+bx^n)^p . bnx^{n-1} dx.$$

Sous cette forme on reconnaît que le facteur

$$(a+bx^n)^p . bnx^{n-1} dx$$

est la différentielle de $(a+bx^n)^{p+1}$, divisée par $p+1$. En appliquant donc le procédé de l'intégration par parties, on pourra écrire

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \int x^m (a+bx^n)^p . dx = & \frac{1}{bn} x^{m-n+1} . \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{p+1} \\ & - \frac{(m-n+1)}{(p+1)\, nb} \int x^{m-n} (a+bx^n)^{p+1} . dx. \end{aligned} \right.$$

L'intégrale proposée se trouve donc ainsi ramenée à une

autre de même forme, dans laquelle l'exposant m est remplacé par $m-n$, et l'exposant p par $p+1$. Mais on peut déduire de la forme (5) une autre formule qui ramène l'intégrale proposée à une intégrale de même forme, dans laquelle p conserve sa valeur, et m est changé en $m-1$. Pour cela, on observe qu'on a

$$x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}=x^{m-n}(a+bx^n)^p.(a+bx^n)$$
$$=ax^{m-n}(a+bx^n)^p+bx^m(a+bx^n)^p.$$

On a donc

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}.dx=a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx$$
$$+b\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

Si l'on substitue cette valeur dans la relation (5), qu'on fasse passer le dernier terme dans le premier membre et qu'on réduise, on en tirera

$$(6)\left\{\begin{aligned}\int x^m(a+bx^n)^p dx &= \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(m+1+np}\\ &-\frac{a(m+1-n}{b(m+1+np)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx.\end{aligned}\right.$$

On peut ensuite renverser cette formule, c'est-à-dire en tirer la valeur de l'intégrale qui figure dans le second membre; et si l'on change alors m en $m+n$, on obtient

$$(7)\left\{\begin{aligned}\int x^m(a+bx^n)^p dx &= \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{a(m+1)}\\ &-\frac{b(m+1+n+np)}{a(m+1)}\int x^{m+n}(a+bx^n).dx.\end{aligned}\right.$$

Les formules (6) ou (7) serviront, quel que soit le signe bm, à ramener l'intégrale proposée à une autre de même

forme, dans laquelle, p restant le même, la valeur absolue de m sera diminuée de n.

En employant successivement les formules (3) ou (4), puis les formules (6) ou (7), on parviendra à retrancher de p toutes les unités contenues, et de m tous les multiples de n qu'il renferme. Quelquefois l'opération peut être abrégée par l'emploi des formules (2) ou (5).

Remarque. Les formules (3) et (6) sont en défaut quand $m+1+np$ est nul ; ou, ce qui revient au même, quand $\frac{m+1}{n}+p$ est égal à zéro. Mais alors la différentielle binome est intégrable directement (181, 2°). Le nombre p étant fractionnaire, on n'a jamais $p+1=0$; ainsi la formule (4) n'est jamais en défaut. Mais la formule (7) est en défaut pour $m=-1$. Or, dans ce cas encore, la différentielle binome peut être intégrée directement (181, 1°).

184. — Prenons pour exemple la différentielle

$$\frac{x^4 dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{ou} \quad x^4(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}.dx.$$

On a dans ce cas

$$m=4,\ n=2,\ p=-\frac{3}{2}.$$

Pour diminuer d'abord la valeur absolue de l'exposant p et celle de l'exposant m, employons la formule (5) ; elle donnera

$$(8) \qquad \int x^4(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx = +x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx \\ -3\int x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.dx.$$

Pour diminuer encore l'exposant de x dans le facteur hors

parenthèse, faisons usage de la formule (6), en y faisant $m=2$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$; elle donnera

$$\int x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\int x^0(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$
$$= -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\text{arc sin } x + \text{const.}$$

Substituant cette valeur dans (8), on obtient

$$\int x^4(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{3}{2}\text{arc sin } x + \text{const.}$$

185. — *Différentielles logarithmiques et exponentielles.* L'intégrale de $\log x \,.\, dx$ s'obtient par le procédé de l'intégration par parties. On a, en effet,

$$\int \log x \,.\, dx = \log x \,.\, x - \int \frac{\log e}{x} dx \,.\, x$$
$$= x \log x - x \log e + \text{const.}$$

Plus généralement on trouve par le même procédé

$$\int x^m \log . x \,.\, dx = \log . x \,.\, \frac{x^{m+1}}{m+1} - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} \,.\, \frac{\log e}{x} dx$$
$$= \frac{x^{m+1}\log x}{m+1} - \log e \,.\, \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + \text{const.}$$

On a vu (168) comment on peut intégrer $a^x dx$ en multipliant et divisant par une constante convenable. On a, en effet,

$$\int a^x dx = \frac{\log e}{\log a}\int \frac{\log a}{\log e} a^x dx = \frac{\log e}{\log a} a^x + \text{const.}$$

On trouve de la même manière

$$\int a^{-x}dx = -\frac{\log e}{\log a}\int -\frac{\log a}{\log e}a^{-x}dx = -\frac{\log e}{\log a}a^{-x} + \text{const.}$$

Si $a = e$, il vient

$$\int e^x dx = e^x + \text{const.} \quad \text{et} \quad \int e^{-x}dx = -e^{-x} + \text{const.}$$

Il peut arriver que, dans ces expressions, x soit multiplié par un facteur constant ; comme, dans la différentiation, ce facteur affecte la dérivée, il faut, dans l'intégration, tenir compte de cette circonstance en multipliant et divisant par ce même facteur. On trouvera, par exemple,

$$\int (e^{mx} + e^{-mx})dx = \frac{1}{m}\int (me^{mx} + me^{-mx})\,dx$$
$$= \frac{1}{m}(e^{mx} - e^{-mx}) + \text{const.}$$

et

$$\int (e^{mx} - e^{-mx})\,dx = \frac{1}{m}\int (me^{mx} - me^{-mx})\,dx$$
$$= \frac{1}{m}(e^{mx} + e^{-mx}) + \text{const.}$$

Ces deux formules trouvent leur emploi dans les applications.

L'exponentielle peut être multipliée par une puissance de x ; l'intégration par parties permet alors de diminuer d'une unité l'exposant de cette puissance. On a, par exemple,

$$(1) \qquad \int x^m e^x dx = x^m e^x - m\int x^{m-1} e^x dx.$$

Si m est entier et positif, en répétant un nombre suffisant de

fois cette opération, on obtiendra exactement l'intégrale demandée. On trouvera, par exemple,

$$\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + \text{const.}$$

Si m est négatif, on peut renverser la relation (1), c'est-à-dire en tirer la valeur de l'intégrale placée dans le second membre ; en changeant ensuite m en $m+1$, on obtient

$$(2) \qquad \int x^m e^x dx = \frac{x^{m+1}e^x}{m+1} - \frac{1}{m+1}\int x^{m+1}e^x dx,$$

et si m est entier, en appliquant un nombre suffisant de fois cette formule, on ramènera l'intégration demandée à dépendre de $\int x^{-1}e^x dx$. On ne pourra pas aller au delà, parce que la formule (2) est en défaut pour $m = -1$. On verra plus loin que cette dernière intégrale s'obtient par développement en série.

Si l'exposant m est fractionnaire, l'emploi des formules (1) ou (2), selon qu'il sera positif ou négatif, permettra de ramener l'intégrale demandée à une intégrale de même forme dans laquelle l'exposant de x sera une fraction.

186. — *Différentielles renfermant des fonctions circulaires.* Il résulte immédiatement de ce qu'on a vu dans le calcul différentiel (44) que l'on a

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + \text{const.}$$

et

$$\int \cos x\, dx = +\sin x + \text{const.}$$

Soit à intégrer

$$\operatorname{tang} x\, dx \quad \text{ou} \quad \frac{\sin x\, dx}{\cos x};$$

on remarquera que le numérateur est, au signe près, la différentielle du dénominateur ; si donc on écrit

$$-\frac{-\sin x\,dx}{\cos x},$$

on aura une expression de la forme $\frac{du}{u}$, qui est la différentielle du logarithme népérien de u ; on aura donc

$$\int \operatorname{tang} x\,dx = -\int \frac{-\sin x\,dx}{\cos x} = -\log'.\cos x + \text{const.}$$

On trouvera de même

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \log'.\sin x + \text{const.}$$

Pour intégrer $\frac{dx}{\sin x}$, on pose

$$x = 2u, \quad \text{d'où} \quad dx = 2du,$$

ce qui donne d'abord

$$\frac{2du}{\sin 2u} \quad \text{ou} \quad \frac{du}{\sin u \cos u}.$$

On divise ensuite les deux termes par $\cos^2 u$, ce qui donne

$$\frac{\frac{du}{\cos^2 u}}{\operatorname{tang} u}.$$

Mais $\frac{du}{\cos^2 u}$ est précisément la différentielle de $\operatorname{tang} u$; ainsi l'expression à intégrer est la différentielle du logarithme né-

périen de tang u. On a donc

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log'.\tang u + \text{const.} = \log'.\tang \frac{1}{2} x + \text{const.}$$

L'intégrale $\int \frac{dx}{\cos x}$ se ramène à la précédente en posant

$$x = \frac{\pi}{2} - y,$$

d'où

$$dx = -dy;$$

et, par suite,

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\int \frac{dy}{\sin y} = -\log' \tang \frac{1}{2} y + \text{const.}$$
$$= -\log' \tang \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \text{const.}$$

187. — Il résulte de ce qu'on a vu dans le calcul différentiel (44), que l'on a immédiatement

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -\cot.x + \text{const.}$$

et

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tang x + \text{const.}$$

Quant aux intégrales

$$\int \sin^2 x\,dx, \quad \text{et} \quad \int \cos^2 x\,dx,$$

on les obtient aisément par addition et soustraction. On a, en effet,

$$\int \cos^2 x\,dx + \int \sin^2 x\,dx$$
$$= \int (\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx = \int dx = x + \text{const.}$$

et

$$\int \cos^2 x\,dx - \int \sin^2 x\,dx$$

$$= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx = \int \cos 2x\,dx,$$

ou, en multipliant et divisant par 2, afin d'avoir sous le signe d la même variable que sous le signe cosinus,

$$\int \cos^2 x\,dx - \int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d\,.\,2x$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + \text{const.}$$

Par suite,

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \text{const.}$$

$$= \frac{2x + \sin 2x}{4} + \text{const.}$$

et

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \text{const.}$$

$$= \frac{2x - \sin 2x}{4} + \text{const.}$$

Si l'on avait à intégrer $\sin^2 x \cos^2 x\,dx$, on pourrait écrire, en multipliant et divisant par 4,

$$\frac{1}{4}\cdot 4\sin^2 x \cos^2 x\,dx, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4}\sin^2 2x\,dx,$$

ou encore

$$\frac{1}{8}\sin^2 2x\,d\,.\,2x.$$

En vertu de la formule qui précède, il viendrait donc

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, d.2x = \frac{4x - \sin 4x}{32} + \text{const}$$

Si l'on avait à intégrer $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$, on pourrait écrire

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tang} x - x + \text{const.}$$

On aurait de même

$$\int \frac{\cos^2 x \, dx}{\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\cot x - x + \text{const.}$$

Plus généralement, si l'on a à intégrer $\sin^m x \cos^p x \, dx$, et que l'un des exposants m ou p soit impair (on les suppose tous deux entiers), l'intégration pourra être ramenée à celle d'une fonction algébrique entière. Car soit, par exemple,

$$p = 2k + 1.$$

On pourra écrire

$$\sin^m x \cos^{2k} x \, . \cos x \, dx ;$$

et, en posant

$$\sin x = u, \quad \text{d'où} \quad \cos x = (1 - u^2)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$\cos x \, dx = du,$$

on aura à intégrer

$$u^m (1 - u^2)^k . du ,$$

différentielle algébrique, rationnelle et entière.

Par exemple, on trouvera ainsi

$$\int \sin^6 x \cos^5 x\, dx = \int u^6 (1-u^2)^2\, du$$
$$= \frac{1}{7}u^7 - \frac{4}{9}u^9 + \frac{6}{11}u^{11} - \frac{4}{13}u^{13} + \frac{1}{15}u^{15} + \text{const.}$$
$$= \frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{4}{9}\sin^9 x + \frac{6}{11}\sin^{11} x - \frac{4}{13}\sin^{13} x$$
$$+ \frac{1}{15}\sin^{15} x + \text{const.}$$

Plus généralement encore, et quels que soient les exposants m et p, on peut transformer $\sin^m x \cos^p x\, dx$ en une différentielle binome, en posant $\sin x = u$. Car on peut écrire

$$\sin^m x \cos^{p-1} x \,.\, \cos x\, dx,$$

ce qui revient à

$$u^m (1-u^2)^{\frac{p-1}{2}} \,.\, du.$$

188. — Les différentielles qui renferment des fonctions circulaires inverses, telles que arc sin $x dx$, ou arc tang $x dx$ s'intègrent par le procédé d'intégration par parties. On trouve, en effet,

$$\int \text{arc sin}\, x dx = \text{arc sin}\, x \,.\, x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= x \,\text{arc sin}\, x + \sqrt{1-x^2} + \text{const.}$$
$$\int \text{arc tang}\, x \,.\, dx = \text{arc tang}\, x \,.\, x - \int x \,.\, \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= \text{arc tang}\, x \,.\, x - \frac{1}{2}\int \frac{2x\, dx}{1+x^2}.$$

Dans le second membre, la quantité sous le signe $\int$ est une fraction dont le numérateur est la différentielle du dénomi-

nateur, c'est-à-dire une fraction de la forme $\frac{du}{u}$, qui est la différentielle du logarithme népérien du dénominateur u; il vient donc

$$\int \text{arc tang}\, x\,.\,dx = x \,\text{arc tang}\, x - \frac{1}{2}\log'(1+x^2) + \text{const.}$$

On trouverait de même

$$\int \text{arc cos}\, x\,.\,dx = x \,\text{arc cos}\, x - \sqrt{1-x^2} + \text{const.},$$

et

$$\int \text{arc cot}\, x\, dx = x \cot x + \frac{1}{2}\log'(1+x^2) + \text{const.}$$

189. — C'est encore à l'aide du procédé d'intégration par parties que l'on intègre les différentielles simples qui contiennent des exponentielles et des sinus ou cosinus. On trouvera, par exemple,

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx,$$

mais

$$-\int e^x \sin x\, dx = \int e^x(-\sin x)dx = e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$$

Par conséquent

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x(\sin x + \cos x) - \int e^x \cos x\, dx,$$

et, en passant le dernier terme dans le premier membre et divisant par 2,

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x + \cos x) + \text{const.}$$

190. — Si, dans les expressions étudiées aux nos 186, 187, 188, 189, la variable x était multipliée par un facteur constant, l'intégrale devrait être divisée par ce facteur. On aurait, par exemple,

$$\int \cos mx dx = \frac{1}{m}\int \cos mx \,.\, dmx = \frac{\sin mx}{m} + \text{const.}$$

$$\int \sin mx dx = -\frac{1}{m}\int -\sin mx \,.\, dmx = -\frac{\cos mx}{m} + \text{const.}$$

$$\int \text{tang}\, mx \,.\, dx = -\frac{1}{m}\int \frac{-\sin mx\, d\, mx}{\cos mx}$$

$$= -\frac{1}{m}\log' \cos mx + \text{const.}$$

$$\int \cot mx dx = \frac{1}{m}\int \frac{\cos mx\, dmx}{\sin mx} = \frac{1}{m}\log' \sin mx + \text{const.}$$

$$\int \sin^2 mx dx = \frac{1}{m}\int \sin^2 mx \,.\, dmx$$

$$= \frac{2mx - \sin 2mx}{4m} + \text{const.}$$

$$\int \cos^2 mx dx = \frac{1}{m}\int \cos^2 mx \,.\, dmx$$

$$= \frac{2mx + \sin 2mx}{4m} + \text{const.}$$

et, ainsi des autres.

§ 3. — INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES PAR DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE

191. — Considérons d'abord l'expression $\int_0^x f(x)\, dx$. Cette expression est une fonction de x, dont la dérivée est $f(x)$; si

donc $f(x)$ et ses dérivées successives conservent des valeurs finies de 0 à x, on pourra développer l'expression proposée par la formule de Maclaurin (69); et, en remarquant que l'intégrale s'annule pour $x=0$, on aura

$$(1)\quad \int_0^x f(x)\,dx = 0 + f(0)\frac{x}{1} + f'(0)\frac{x^2}{1.2} + f''(0)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

La série qui forme le second membre pourra donc tenir lieu de la fonction dont $f(x)$ est la dérivée.

Considérons maintenant l'intégrale $\int_a^x f(x)\,dx$. Si $f(x)$ et ses dérivées conservent des valeurs finies de 0 à x, on pourra remarquer que l'on a

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_0^x f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx.$$

Si donc on développe par la formule (1) les deux intégrales qui figurent dans le second membre, et qu'on opère la soustraction, on obtiendra

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_a^x f(x)\,dx &= f(0).\frac{x-a}{1} + f'(0)\frac{x^2-a^2}{1.2} \\ &\quad + f''(0)\frac{x^3-a^3}{1.2.3} + \ldots \end{aligned} \right.$$

Si $f(x)$ et ses dérivées conservent des valeurs finies de a à x, mais qu'il ne soit pas permis d'y faire $x=0$, on pourra opérer comme il suit.

Posons

$$x = a + u,$$

et

$$\int_a^{a+u} f(a+u)\,du = \mathrm{F}(u).$$

Nous pourrons développer la fonction F par la série de Maclaurin. Mais nous aurons

$$F(0)=0,\ F'(u)=f(a+u),\ \text{d'où}\ F'(0)=f(a),$$
$$F''(u)=f'(a+u),\ \text{d'où}\ F''(0)=f'(a),$$
$$F'''(u)=f''(a+u),\ \text{d'où}\ F'''(0)=f''(a),$$

et ainsi de suite. Il viendra donc

$$(3)\qquad \int_a^{a+u} f(a+u)\,du = 0 + f(a)\cdot\frac{u}{1} + f'(a)\frac{u^2}{1.2} + f''(a)\frac{u^3}{1.2.3} + \ldots$$

ou

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} \int_a^x f(x)dx &= f(a)\frac{(x-a)}{1} + f'(a)\frac{(x-a)^2}{1.2} \\ &\quad + f''(a)\frac{(x-a)^3}{1.2.3} + \ldots \end{aligned} \right.$$

192. — L'intégration par développement en série peut encore être présentée d'une autre manière qu'il est utile de connaître. Soit $f(x)$ la fonction placée sous le signe $\int$; et supposons qu'on puisse la développer par la série de Maclaurin, on aura

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1} + f''(0)\frac{x^2}{1.2} + f'''(0)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + R_n.$$

Multiplions les deux membres par dx, et intégrons entre les limites 0 et x, il viendra

$$(4)\qquad \left\{ \begin{aligned} \int_0^x f(x)\,dx &= f(0)\frac{x}{1} + f'(0)\frac{x^2}{1.2} + f''(0)\frac{x^3}{1.2.3} \\ &\quad + f'''(0)\frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots + \int_0^x R_n\,dx. \end{aligned} \right.$$

Or, soient α et β la plus grande et la plus petite valeur que prend R_n quand x varie de 0 à x; on aura

$$\alpha dx > R_n dx > \beta dx,$$

et, par conséquent,

$$\alpha x > \int_0^x R_n dx > \beta x.$$

La quantité $\int_0^x R_n dx$ est donc égale à un certain produit kx, dans lequel k désigne une quantité comprise entre α et β. Mais R_n tendant vers zéro à mesure que n augmente, il en est de même de α et de β, et par conséquent aussi de la quantité intermédiaire k. Donc kx tend vers zéro à mesure que n augmente, c'est-à-dire que l'intégrale qui figure dans le second membre de l'équation (4) est un *reste* qui tend vers zéro. On peut donc se dispenser de l'écrire, et l'on retombe ainsi sur l'équation (1).

Si l'on intégrait entre les limites a et x, on retomberait de même sur l'équation (2). On pourrait aussi établir de la même manière l'équation (3) en développant $f(a+u)$.

192 *bis*. — Comme premier exemple de ce qui précède, proposons-nous de développer un arc en fonction de son sinus. L'application de la formule du binome (80) donne, pour x, compris entre $+1$ et -1,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots.$$

Multiplions les deux membres par dx, et intégrons de 0 à x, il viendra

$$\text{arc}\sin x = x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7} + \ldots$$

Pour $x=1$, on obtient

(5) $$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2.3}+\frac{1.2}{2.4.5}+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}+\ldots.$$

Comme second exemple, cherchons le développement de l'arc en fonction de sa tangente. La formule du binome donne

$$\frac{1}{1+x^2}=(1-x^2)^{-1}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots,$$

Multiplions par dx et intégrons de 0 à x, nous aurons

(6) $$\operatorname{arc\,tang} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots.$$

Pour $x=1$, on obtient

(7) $$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots.$$

193. Remarque. — Les formules (5) et (7) ne convergent pas assez rapidement pour servir au calcul du nombre π. Mais on peut en déduire des formules plus convergentes. On démontre aisément, et il est facile de vérifier, que l'on a

$$\operatorname{arc\,tang}.1=4\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tang}.\frac{1}{239},$$

d'où

$$\pi=4\left(4\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tang}.\frac{1}{239}\right).$$

On calcule arc tang $\frac{1}{5}$ et arc tang $\frac{1}{239}$ par la formule (6), et en substituant on obtient la valeur de π. Il suffit d'employer les onze premiers termes du premier développement, et les trois premiers termes du second, pour obtenir le nombre π

avec quinze décimales. (Voir les Traités d'Algèbre supérieure.)

194. — Au lieu de multiplier les deux membres de la formule de Maclaurin par dx, on peut les multiplier par $x^m dx$, m étant un exposant positif; et, en intégrant de a à x, on obtient

$$\int_a^x x^m f(x)\,dx = f(0)\,.\,\frac{x^{m+1}-a^{m+1}}{m+1} + f'(0)\frac{x^{m+2}-a^{m+2}}{1.(m+2)} + f''(0)\frac{x^{m+3}-a^{m+3}}{1.2.(m+3)} + \ldots.$$

On démontrerait, comme au n° 191, que le *reste* de la série tend vers zéro.

On peut appliquer une méthode analogue à l'intégration de la différentielle $\frac{e^x\,dx}{x}$, que nous avons rencontrée au n° 185. On a, en effet,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots + R_n.$$

Multiplions les deux membres par $\frac{dx}{x}$ et intégrons de a à x, a étant supposé positif, il viendra

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_a^x \frac{e^x dx}{x} &= \log'.\frac{x}{a} + \frac{x-a}{1} + \frac{x^2-a^2}{1.2.2} + \frac{x^3-a^3}{1.2.3.3} \\ &+ \frac{x^4-a^4}{1.2.3.4.4} + \ldots + \int_a^x R_n \frac{dx}{x}. \end{aligned} \right.$$

Or, si α et β désignent, comme plus haut, la plus grande et la plus petite valeur que prenne R_n quand x varie de a à x, l'intégrale $\int_a^x R_n \frac{dx}{x}$ sera comprise entre $\alpha \int_a^x \frac{dx}{x}$ et $\beta \int_a^x \frac{dx}{x}$,

c'est-à-dire entre $\alpha \log' . \frac{x}{a}$ et $\beta \log' . \frac{x}{a}$. Elle aura donc pour valeur une quantité telle que $k \log' . \frac{x}{a}$, k étant compris entre α et β. Mais R_n tendant vers zéro à mesure que n augmente, il en est de même de α et de β, et par conséquent aussi de l'intermédiaire k. Donc enfin l'intégrale $\int_a^{x} R_n \frac{dx}{x}$ est un reste qui tend vers zéro, et que l'on peut se dispenser d'écrire.

§ 4. — CALCUL DES INTÉGRALES DÉFINIES PAR APPROXIMATION

195. — Lorsqu'une intégrale définie ne peut être obtenue par aucun des procédés d'intégration connus, on peut toujours en calculer la valeur numérique avec une approximation plus que suffisante en général pour les besoins de l'application.

C'est encore au calcul approché qu'il faut recourir lorsque, comme cela arrive fréquemment dans les questions qui touchent à la pratique, la fonction qui figure sous le signe $\int$ n'est point connue sous forme mathématique, mais qu'elle est seulement donnée par des valeurs isolées ou par le tracé d'une courbe.

Il existe, pour le calcul approché de la valeur numérique des intégrales définies, plusieurs méthodes, dont la plus répandue est fondée sur les considérations géométriques suivantes.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'évaluer le trapèze curviligne AOQC, limité par une courbe ABC qui n'est point donnée, mais déterminée seulement par les trois ordonnées équidistantes AO, BP, CQ, que nous appellerons y_0, y_1, y_2. Désignons par h l'intervalle OP = PQ des ordonnées.

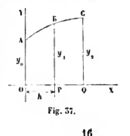


Fig. 37.

Si la courbe ABC est continue, et si, entre les points A et C, elle ne présente ni inflexion ni aucun autre point singulier, on pourra, sans erreur notable, la remplacer par une autre courbe quelconque remplissant les mêmes conditions, par exemple par une parabole ayant pour axe une parallèle aux ordonnées; c'est-à-dire que l'aire du trapèze curviligne limité par cette parabole, l'axe des x et les ordonnées extrêmes, différera fort peu du trapèze curviligne proposé. Et l'erreur sera d'autant moindre que la distance h sera plus petite.

Si l'on met l'origine au pied O de la première ordonnée, l'équation de la parabole dont il s'agit sera de la forme

(1) $$y = y_0 + ax + bx^2.$$

Et comme elle doit passer par les points B et C qui ont pour coordonnées

$$x = h,\ y = y_1, \quad \text{et} \quad x = 2h,\ y = y_2,$$

on devra avoir

(2) $$y_1 = y_0 + ah + bh^2,\ y_2 = y_0 + 2ah + 4bh^2,$$

équations qui déterminent a et b. Posons $\Delta_1 = y_1 - y_0$, la première des équations (2) pourra s'écrire

(3) $$\Delta_1 = ah + bh^2.$$

Posons de même

$$\Delta'_1 = y_2 - y_1;$$

en retranchant membre à membre les équations (2) on obtiendra

(4) $$\Delta'_1 = ah + 3bh^2.$$

Posons enfin,

$$\Delta_2 = \Delta'_1 - \Delta_1,$$

on trouvera, en retranchant membre à membre les équa-

tions (3) et (4),

(5) $$\Delta_2 = 2bh^2.$$

De cette dernière on tire

$$b = \frac{1}{2}\frac{\Delta_2}{h^2};$$

et, en substituant dans (3), on obtient

$$a = \frac{\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2}{h}.$$

L'équation de la parabole est donc

(6) $$y = y_0 + \left(\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2\right)\frac{x}{h} + \frac{1}{2}\Delta_2 \cdot \frac{x^2}{h^2}.$$

Cette équation, dans laquelle les quantités Δ_1 et Δ_2 sont ce que l'on appelle la *différence première* et la *différence seconde*, est celle qui, dans la pratique, sert à résoudre le problème de l'INTERPOLATION [1].

Pour obtenir l'aire de la parabole, il suffit (162) de multiplier les deux membres de l'équation (6) par dx, et d'intégrer entre les limites $x = 0$ et $x = 2h$, ce qui donne, en appelant U l'aire cherchée,

$$U = 2hy_0 + 2h\left(\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2\right) + \frac{4}{3}\Delta_2 h$$
$$= 2h\left(y_0 + \Delta_1 + \frac{1}{6}\Delta_2\right),$$

ou, en remettant pour Δ_1 et Δ_2 leurs valeurs $\Delta_1 = y_1 - y_0$, et $\Delta_2 = \Delta'_1 - \Delta_1 = y_2 - 2y_1 + y_0$,

(7) $$U = 2h\left(y_1 + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{6}\right) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

[1] Voir ce mot dans notre *Dictionnaire des Mathématiques appliquées*.

196.—Supposons maintenant qu'il s'agisse d'évaluer l'aire du trapèze AOCB limité par une courbe quelconque AB, l'axe des x, et deux ordonnées extrêmes y_0, Y. Divisons l'inter-

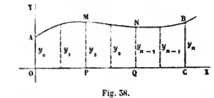


Fig. 38.

valle OC de ces ordonnées en un nombre pair n de parties égales, et soit h l'une de ces parties. Par tous les points de division menons des ordonnées, que nous désignerons successivement par $y_1, y_2, y_3 \ldots y_{n-1}$. Soit u_1 l'aire du trapèze curviligne limité par les ordonnées y_0 et y_2, u_2 celle du trapèze limité par les ordonnées y_2 et y_4, et ainsi de suite; enfin, u_n celle du trapèze limité par les ordonnées y_{n-2} et Y. Nous aurons, en vertu de la formule (7) établie au numéro précédent

$$u_1 = \frac{1}{3} h (y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$u_2 = \frac{1}{3} h (y_2 + 4y_3 + y_4),$$

$$u_3 = \frac{1}{3} h (y_4 + 4y_5 + y_6),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n = \frac{1}{3} h (y_{n-2} + y_{n-1} + \mathrm{Y}).$$

Ajoutons membre à membre toutes ces inégalités, et soit U l'aire totale à évaluer. Le facteur $\frac{1}{3} h$ sera commun. Les ordonnées extrêmes y_0 et Y n'entreront chacune qu'une seule fois dans la somme. Les ordonnées d'indice pair y_2, y_4,

$y_4, \ldots y_{n-2}$ y entrent chacune deux fois. Les ordonnées d'indice impair $y_1, y_3, y_5, \ldots y_{n-1}$, y entreront chacune quatre fois. On aura donc

$$(8) \begin{cases} U = \frac{1}{3} h \left[(y_0 + Y) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1}) \right. \\ \left. \quad + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \ldots + y_{n-2}) \right]. \end{cases}$$

Telle est la *formule de Thomas Simpson*. Elle s'énonce en disant que : *l'aire de la courbe a pour valeur le tiers de l'intervalle de deux ordonnées consécutives, multiplié par la somme des ordonnées extrêmes, plus quatre fois la somme des ordonnées d'indice impair, plus deux fois la somme des ordonnées d'indice pair.*

Le résultat du calcul s'approchera d'autant plus de la vérité que le nombre n sera plus considérable.

197. — Pour donner une idée de l'approximation, proposons-nous d'évaluer par cette méthode l'aire de l'hyperbole équilatère $xy = 1$, depuis l'abscisse 1 jusqu'à l'abscisse 11. Divisons l'intervalle 11 — 1 en dix parties égales ; les ordonnées répondant aux abscisses 1, 2, 3..., 10, 11 auront pour valeur :

$x = 1 \ldots\ldots y_0 = 1{,}000$	$x = 7 \ldots y_6 = 0{,}143$
$x = 2 \ldots\ldots y_1 = 0{,}500$	$x = 8 \ldots y_7 = 0{,}125$
$x = 3 \ldots\ldots y_2 = 0{,}333$	$x = 9 \ldots y_8 = 0{,}111$
$x = 4 \ldots\ldots y_3 = 0{,}250$	$x = 10 \ldots y_9 = 0{,}100$
$x = 5 \ldots\ldots y_4 = 0{,}200$	$x = 11 \ldots Y = 0{,}091$
$x = 6 \ldots\ldots y_5 = 0{,}167$	

La somme des ordonnées extrêmes $y_0 + Y$ est égale à. 1,091

La somme des ordonnées d'indice impair $y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9$, a pour valeur 1,142 ; en multipliant par 4, on obtient. 4,568

A Reporter. . . 5,659

REPORT.	5,659
La somme des ordonnées d'indice pair $y_2+y_4+y_6+y_8$ a pour valeur 0,787; en multipliant par 2, on trouve.	1,574
La somme de ces nombres est.	7,233
En multipliant par le tiers de l'intervalle de deux ordonnées consécutives, c'est-à-dire par $\frac{1}{3}$, puisque ici $h=1$, on obtient.	2,411
Or l'aire dont il s'agit est donnée exactement par la formule $\int_1^{11}\frac{dx}{x}=\log'.11=2,3979...$ ou environ.	2,398
Il y a donc une erreur en plus, qui est de. . .	0,013

Et l'erreur relative correspondante est $\frac{13}{2398}$ ou un peu moins de $\frac{1}{184}$.

198. — REMARQUES. I. Si la courbe proposée avait des points d'inflexion, il faudrait mener les ordonnées de ces points, et évaluer séparément les parties de l'aire totale comprises entre ces ordonnées.

II. Si la courbe coupait l'axe des x, auquel cas une partie de la courbe serait située au-dessous de cet axe, il faudrait évaluer séparément les aires positives placées au-dessus, et les aires négatives (164, II) placées au-dessous.

III. La formule de Thomas Simpson s'applique à toutes les intégrales définies, car la fonction placée sous le signe $\int$ peut toujours, si elle est continue, représenter l'ordonnée d'une courbe, et par conséquent l'intégrale proposée représente l'aire de cette courbe.

La formule n'est en défaut que lorsque l'une des limites est infinie, ou qu'elles le sont toutes les deux.

III. — APPLICATIONS DU CALCUL DES INTÉGRALES DÉFINIES

§ I. — RECTIFICATION DES COURBES

199. — *Rectification des courbes planes.* On entend par *longueur* d'un arc de courbe, la limite vers laquelle tend la longueur d'une ligne brisée inscrite ou circonscrite, terminée aux mêmes extrémités. On a vu (114) que si x, y sont les coordonnées rectangulaires d'un point d'une courbe plane, et $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ celles d'un point voisin sur cette courbe, la corde qui les joint a pour expression $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. Si le second point se rapproche indéfiniment du premier, la corde tend vers l'arc infiniment petit, que l'on désigne par ds, en sorte qu'on a

$$ds = \lim.\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} = dx\sqrt{1+y'^2}.$$

Cet arc infiniment petit est ce qu'on appelle un *élément* de la courbe, et ce qu'on appelle la *longueur* de la courbe, entre deux points donnés de cette courbe, est la somme de ses éléments compris entre ces deux points. *Rectifier* une courbe, c'est calculer sa longueur, depuis le point qui a pour abscisse a, jusqu'au point qui a pour abscisse b. On a donc, en appelant s cette longueur,

$$(1) \qquad s = \int_a^b ds = \int_a^b dx\sqrt{1+y'^2}.$$

Pour faire le calcul, il faudra donc tirer de l'équation de la courbe la valeur de y' en fonction de x, et évaluer l'intégrale définie qui forme le second membre de la relation (1). Nous en donnerons quelques exemples.

200. — *Rectification de la parabole.* Prenons l'axe de la courbe pour axe des y, son équation pourra être mise sous la forme

$$y=\frac{x^2}{2p}, \quad \text{d'où} \quad y'=\frac{x}{p}.$$

Par conséquent, en comptant les arcs à partir du sommet, par exemple, on aura

$$s=\int_0^x dx\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}.$$

Pour faire l'intégration, il est commode de poser

$$x=pu, \quad \text{d'où} \quad dx=pdu.$$

L intégrale indéfinie

$$\int pdu\sqrt{1+u^2}$$

a pour valeur

$$p\cdot\frac{1}{2}\left[\log'\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)+u\sqrt{1+u^2}\right]+\text{const.}$$

ou, en remettant pour u sa valeur $\frac{x}{p}$,

$$p\cdot\frac{1}{2}\left(\log'.\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}+\frac{x\sqrt{x^2+p^2}}{p^2}\right)+\text{const.}$$

Cette valeur devant s'annuler pour $x=0$, auquel cas la quantité entre parenthèses s'annule, il faut que la constante soit nulle. On a donc enfin

$$(2) \qquad s=\frac{p}{2}\log'.\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}+\frac{x\sqrt{x^2+p^2}}{2p}.$$

201. — *Rectification de la chaînette.* La courbe qui porte le nom de chaînette est celle qu'affecterait une chaîne infiniment mince, pesante, et parfaitement flexible, librement suspendue par ses extrémités. On démontre en Mécanique que l'équation de cette courbe est

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

on en tire

$$y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

Par conséquent

$$1+y'^2=1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}}-2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)=\left(\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)^2.$$

On a donc, en comptant les arcs à partir du point le plus bas qui répond à $x=0$,

$$(3)\qquad s=\int_0^x dx\left(\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

sans constante, attendu que l'expression doit s'annuler pour $x=0$.

202. — *Rectification de la cycloïde.* On sait que cette courbe est représentée par les équations

$$x=\mathrm{R}\,(\alpha-\sin\alpha),\quad \text{et}\quad y=\mathrm{R}\,(1-\cos\alpha).$$

On en tire successivement

$$dx=\mathrm{R}\,(1-\cos\alpha)\,d\alpha,\quad dy=\mathrm{R}\sin\alpha\,d\alpha,$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha};$$

$$1+y'^2=\frac{1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}=\frac{2}{1-\cos\alpha}.$$

On a donc, si l'on calcule la longueur de la cycloïde entière, depuis le point qui a pour abscisse 0, jusqu'au point qui a pour abscisse $2\pi R$,

$$s = \int_0^{2\pi} R(1 - \cos\alpha)\,d\alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos\alpha}}$$
$$= R\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\alpha\sqrt{1-\cos\alpha} = 2R\int_0^{2\pi}\sin\frac{1}{2}\alpha\,d\alpha,$$

ou, en multipliant et divisant par 2, afin d'avoir sous le signe d la même variable que sous le signe sinus,

$$s = 4R\int_0^{2\pi}\sin\frac{1}{2}\alpha \cdot d\,\frac{1}{2}\alpha.$$

L'intégrale indéfinie est $-\cos\frac{1}{2}\alpha$; et, entre les limites 0 et 2π, elle devient $1+1$ ou 2. On a donc enfin pour la longueur de la cycloïde entière

$$(4) \qquad s = 8R,$$

ou 8 fois le rayon du cercle générateur.

203. — *Rectification des courbes à double courbure.* Soient x, y, z, et $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, les coordonnées de deux points voisins sur la courbe; la corde qui les joint a pour expression $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$. Si l'on conçoit que le second point se rapproche indéfiniment du premier, cette corde tendra vers l'arc qu'elle sous-tend, que l'on appelle un *élément* de la courbe, et que l'on désigne par ds. On a donc

$$ds = \lim.\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2} = dz\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2+1}.$$

La longueur de la courbe entre deux points, répondant aux ordonnées $z=a$ et $z=b$, est la somme de ses éléments com-

pris entre ces deux points. En la désignant par s on a donc

$$(5) \qquad s=\int_a^b ds=\int_a^b dz\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2+1}.$$

Pour faire le calcul, on tirera des équations de la courbe les valeurs de $\frac{dx}{dz}$ et de $\frac{dy}{dz}$, et l'on évaluera l'intégrale définie formant le second membre de la relation (5).

204. — Nous prendrons pour exemple la courbe qui a pour équations

$$x=az\cos mz, \quad \text{et} \quad y=az\sin mz;$$

c'est une hélice conique, intersection d'un cône de révolution avec un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe du cône, et qui a pour base une spirale d'Archimède.

On tire de ces équations

$$\frac{dx}{dz}=a\cos mz - maz\sin mz,$$

$$\frac{dy}{dz}=a\sin mz+maz\cos mz.$$

Élevant au carré et ajoutant, on obtient

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2=a^2+m^2a^2z^2.$$

Par conséquent, on aura, en comptant les arcs à partir du plan des xy,

$$s=\int_0^z dz\sqrt{a^2+m^2a^2z^2+1}.$$

Pour effectuer l'intégration, on posera

$$z=\frac{\sqrt{1+a^2}}{ma}.u, \quad \text{d'où} \quad dz=\frac{\sqrt{1+a^2}}{ma}du;$$

Nous prendrons pour premier exemple le cercle, parce qu'il est intéressant de retrouver par cette voie les résultats obtenus par des voies toutes différentes. Proposons-nous d'évaluer l'aire comprise entre un arc de cercle BM, l'axe des x passant par le centre, et les deux ordonnées répondant à $x=0$ qui est l'abscisse du centre, et $x=$ OP qui est une abscisse quelconque.

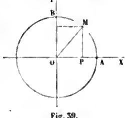


Fig. 39.

On a dans ce cas $y=\sqrt{R^2-x^2}$, et par conséquent

$$U=\int_0^x dx\sqrt{R^2-x^2}.$$

Si l'on pose

$$x=Ru, \qquad \text{d'où} \qquad dx=Rdu,$$

on obtient

$$U=R^2\int_0^u du\sqrt{1-u^2}=R^2\frac{1}{2}\left(\text{arc}\sin u+u\sqrt{1-u^2}\right),$$

sans constante, puisque l'aire doit s'annuler pour $u=0$. En remettant pour u sa valeur $\frac{x}{R}$, on peut écrire

$$(1) \qquad U=\frac{1}{2}R^2\,\text{arc}\sin\frac{x}{R}+\frac{1}{2}x\sqrt{R^2-x^2}.$$

Ce résultat est conforme à la Géométrie; car si l'on tire le rayon OM, on a

$$\text{surf. BOPM} = \text{sect. BOM} + \text{tri. OMP}$$
$$=\frac{1}{2}R^2.\,\text{angle BOM}+\frac{1}{2}\,\text{OP}.\text{MP},$$

expression qui coïncide avec la précédente.

Pour $x=\mathrm{R}$, on aurait le quart du quadrant; dans ce cas,

$$\text{arc sin}\,\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}}=\frac{\pi}{2},\quad \text{par conséquent}\quad \mathrm{U}=\frac{1}{4}\pi\mathrm{R}^2,$$

attendu que le second terme disparaît. L'aire du cercle entier est bien ainsi représentée par $\pi\mathrm{R}^2$.

206. — *Aire de l'ellipse.* On pourrait opérer comme ci-dessus ; mais le calcul se simplifie. On a, en effet, pour l'aire du quadrant d'ellipse

$$\mathrm{U}=\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,.\,dx=\frac{b}{a}\int_0^a dx\sqrt{a^2-x^2}.$$

Or, l'intégrale qui figure dans le second membre exprime l'aire d'un quadrant de cercle ayant pour rayon a ; elle équivaut donc à $\frac{1}{4}\pi a^2$. On a donc

$$\mathrm{U}=\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{4}\pi a=\frac{1}{4}\pi ab.$$

L'aire de l'ellipse entière est représentée ainsi par πab.

On peut remarquer que si l'on compare des aires limitées aux mêmes ordonnées dans l'ellipse et dans le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, les expressions de ces aires ne diffèrent que parce que celle de l'ellipse est multipliée par $\frac{b}{a}$. L'aire prise sur l'ellipse est donc à celle qui lui correspond sur le cercle dans le rapport de b à a.

207. — *Aire de la parabole.* Calculons l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et une ordonnée quelconque. Nous aurons

$$y=\sqrt{2px}=\sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{1}{2}},$$

par suite

$$U = \int_0^x \sqrt{2p} \, . \, x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2p} \, . \, x^{\frac{3}{2}},$$

sans constante, puisque l'aire doit s'annuler pour $x=0$. Cette expression peut s'écrire

$$U = \frac{2}{3} \sqrt{2px} \, . \, x = \frac{2}{3} yx.$$

L'aire considérée est donc les $\frac{2}{3}$ du rectangle construit sur les coordonnées x et y du point auquel correspond l'ordonnée prise pour limite.

On peut remarquer que si, au lieu de la parabole du second degré $y = \sqrt{2p} \, . \, x^{\frac{1}{2}}$, on considère une parabole de degré quelconque $y = ax^m$, m étant un exposant positif quelconque, l'aire limitée par l'ordonnée correspondante à une abscisse x est toujours une fraction rationnelle du rectangle construit sur les coordonnées x et y, car on a

$$U = \int_0^x ax^m dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1}$$

sans constante, ou bien

$$U = \frac{ax^m \, . \, x}{m+1} = \frac{yx}{m+1}.$$

Dans la parabole $y = ax^{\frac{3}{2}}$ par exemple, on a

$$U = \frac{xy}{\frac{3}{2}+1} = \frac{2}{5} xy.$$

208. — *Aire de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.* On se propose d'obtenir l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et deux ordonnées répondant aux abscisses a et x. En appelant θ l'angle des asymptotes, et prenant $xy = m^2$ pour l'équation de la courbe, on a

$$U = \sin\theta \int_a^x m^2 . \frac{dx}{x} = m^2 \sin\theta . \log' . \frac{x}{a}.$$

Si l'on suppose $m = 1$, $a = 1$ et $\theta = 90^\circ$, il vient

$$U = \log' . x,$$

c'est-à-dire que, dans ce cas, *l'aire considérée est exprimée par le même nombre que le logarithme népérien de l'abscisse qui répond à la limite supérieure;* c'est pour cette raison que les logarithmes népériens portent aussi le nom de *logarithmes hyperboliques.*

209. — *Aire de la logarithmique.* L'aire de la logarithmique

$$y = a \log x$$

prise à partir de $x = 1$, a pour expression

$$U = a \int_1^x \log x\, dx = a\,[x \log x - (x - 1) \log e].$$

La même courbe autrement disposée peut être présentée sous la forme

$$y = A a^{-x}.$$

L'aire de cette courbe, comptée à partir de $x = 0$, a pour expression

Fig. 40.

$$U = A \int_0^x a^{-x} dx = A \frac{\log e}{\log a} (1 - a^{-x}).$$

Pour $x=\infty$, on trouve

$$U=A\,\frac{\log e}{\log a}.$$

Ainsi, l'aire dont il s'agit, quoique prolongée indéfiniment dans le sens des x positifs, a néanmoins une valeur finie.

210. — *Aire de la sinusoïde.* L'aire de la courbe

$$y=a\sin mx,$$

comptée à partir de $x=0$, a pour expression

$$U=a\int_0^x \sin mx\,dx=\frac{a}{m}\,(1-\cos mx).$$

Pour $x=\frac{\pi}{m}$, elle prend la valeur $\frac{2a}{m}$. Pour $x=\frac{2\pi}{m}$, elle prend la valeur zéro; ce qui tient à ce que de $x=\frac{\pi}{m}$ à $x=\frac{2\pi}{m}$ la courbe présente, au-dessous de l'axe des x, une portion égale à celle qu'elle offre au-dessus de zéro à $\frac{\pi}{m}$; en sorte que la partie négative de l'aire détruit algébriquement la partie positive.

211. — *Aire de la cycloïde.* On a vu que l'on a, dans ce cas,

$$y=R\,(1-\cos\alpha),\quad \text{et}\quad dx=R\,(1-\cos\alpha)\,d\alpha.$$

Il en résulte que l'aire entière de la courbe, depuis $x=0$ jusqu'à $x=2\pi R$, est donnée par la formule

$$\begin{aligned} U&=R^2\int^{2\pi}(1-\cos\alpha)^2 d\alpha \\ &=R^2\left(\int_0^{2\pi} d\alpha-2\int_0^{2\pi}\cos\alpha\,d\alpha+\int_0^{2\pi}\cos^2\alpha\,d\alpha\right).\end{aligned}$$

La première de ces trois intégrales a pour valeur 2π; la seconde est nulle; la troisième (187) a pour valeur π. Il vient donc

$$U = R^2(2\pi + \pi), \quad \text{ou} \quad U = 3\pi R^2,$$

c'est-à-dire que *l'aire de la cycloïde équivaut à trois fois l'aire du cercle générateur.*

212. — *Aire d'une figure irrégulière quelconque.* Rapportons cette figure à deux axes rectangulaires tracés dans son plan; puis, par des parallèles à l'axe des y, supposons-la divisée en bandes très-minces, telles que MNN'M'. Si les cordes MN et M'N' sont suffisamment rapprochées, on peut remplacer la bande dont il s'agit par le rectangle MNHI, en négligeant les triangles curvilignes MIM' et NHN' infiniment petits par rapport à ce rectangle. On peut donc regarder l'aire proposée comme la limite d'une somme de rectangles analogues, ayant pour hauteur la corde MN, que nous désignerons par u, et pour base la longueur NH ou PP', qui n'est autre chose que l'accroissement Δx de l'abscisse OP ou x, qui répond à cette corde. Soient $OA' = a$, et $OB' = b$ les abscisses correspondantes aux parallèles à l'axe des y menées tangentiellement à la figure donnée. Nous aurons

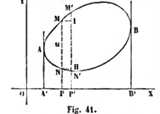


Fig. 41.

$$U = \lim. \sum u\Delta x = \int_a^b u\,dx.$$

Comme la corde u ne sera pas en général donnée en fonction de x, on emploiera la formule de Th. Simpson. On divisera l'intervalle A'B' en un nombre pair n de parties égales; par les points de division on mènera des parallèles à l'axe des y, et

l'on mesurera les cordes telles que MN ; nous les désignerons par u_1, u_2, u_3, ... u_{n-1}. Les cordes extrêmes seront nulles, puisqu'elles correspondent aux tangentes AA′ et BB′. En appelant donc h la $n^{ième}$ partie de AA′, on aura, avec une approximation dépendant de la grandeur du nombre n,

$$U = \frac{h}{3}[4(u_1 + u_2 + u_3 \ldots) + 2(u_4 + u_5 + u_6 \ldots)].$$

L'approximation sera toutefois limitée attendu que les cordes u_1, u_2, u_3, etc., ne sont obtenues elles-mêmes que par un procédé graphique qui ne saurait donner des mesures rigoureuses. Néanmoins, ce procédé est fréquemment employé dans les applications.

213. — *Aires des courbes en coordonnées polaires.* Quoique l'on fasse rarement usage des coordonnées polaires dans les applications, il peut être utile de savoir évaluer l'aire des courbes rapportées à ce genre de coordonnées.

On se propose ordinairement dans ce cas de calculer le secteur compris entre un arc AB de la courbe et les rayons vecteurs OA et OB menés à ses extrémités. Soit d'abord M un point quelconque de cet arc, et proposons-nous d'évaluer le secteur MOA. Si ρ et ω sont les coordonnées du point M, le secteur MOA est évidemment une fonction de ω. Désignons par u cette fonction.

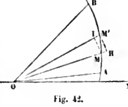


Fig. 42.

Quand ω croîtra de $\Delta\omega$, u croîtra de Δu ; et cet accroissement sera l'aire du secteur M′OM compris entre les rayons vecteurs $OM = \rho$ et $OM' = \rho + \Delta\rho$ qui répondent à ω et à $\omega + \Delta\omega$. Or, si l'on décrit du pôle O comme centre les arcs MI et M′H, on reconnaît que le secteur M′OM est compris entre les secteurs circulaires MOI et M′OH, qui ont pour angle au centre $\Delta\omega$. On a donc

$$\frac{1}{2}\rho^2\Delta\omega < \Delta u < \frac{1}{2}(\rho + \Delta\rho)^2\Delta\omega,$$

ce qu'on peut écrire

$$u = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \rho^2 \cdot \omega,$$

c'est-à-dire que l'aire du secteur de spirale considéré est le tiers du secteur circulaire qui aurait pour rayon ρ et pour angle au centre ω.

II. Considérons en second lieu la spirale logarithmique $\rho = ae^{\omega}$.

Nous aurons

$$u = a^2 \int_0^{\omega} e^{2\omega} d\omega = \frac{1}{2} a^2 (e^{2\omega} - 1) = \frac{1}{2} (\rho^2 - a^2),$$

expression facile à construire.

On peut remarquer que si l'on prend pour limite $-\omega$ et zéro, on obtient

$$u = \frac{1}{2} a^2 (1 - 0) = \frac{1}{2} a^2.$$

Ainsi l'aire indéfinie que décrit le rayon vecteur dans le sens des ω négatifs, lorsque la courbe tourne indéfiniment autour du pôle en s'en rapprochant d'aussi près qu'on voudra sans jamais l'atteindre, a néanmoins une valeur finie.

§ 3. — CALCUL DE L'AIRE DES SURFACES COURBES.

215. — On entend par l'*aire* d'une surface courbe fermée la limite vers laquelle tend une surface polyédrale inscrite ou circonscrite. On peut toujours imaginer un polyèdre à faces triangulaires inscrit dans la surface proposée ; et si, par chacun de ses sommets, on mène des plans tangents à la surface, on détermine un polyèdre circonscrit. Si l'on multiplie indéfiniment le nombre des faces du polyèdre inscrit, et,

par suite, celles du polyèdre circonscrit, les aires de ces deux polyèdres tendent vers une limite commune; c'est cette limite qui est l'aire de la surface proposée.

Si la surface, au lieu d'être fermée, est terminée par un certain contour C, on peut concevoir qu'on ait pris sur ce contour un nombre indéfini de points pour servir de sommets au polyèdre inscrit, et qui seront en même temps les points de contact d'autant de faces du polyèdre circonscrit. Le polyèdre inscrit se terminera alors à une ligne brisée L inscrite au contour C, et le polyèdre circonscrit se terminera à une ligne brisée L' circonscrite au même contour. (En négligeant les infiniment petits du troisième ordre, on peut toujours admettre que deux tangentes consécutives de ce contour se rencontrent.) Quand on multipliera indéfiniment le nombre des sommets du polyèdre inscrit, et, par suite, le nombre des faces du polyèdre circonscrit, les lignes brisées L et L' tendront vers le contour C, et les surfaces des deux polyèdres tendront vers une même limite, qui sera encore l'aire de la surface proposée.

Il résulte de ces considérations que, dans une étendue infiniment petite, aux environs d'un point pris sur la surface, cette surface peut être confondue avec son plan tangent en ce point.

On peut remarquer qu'on emploie des considérations du même genre dans la Géométrie élémentaire lorsqu'on regarde la surface latérale d'un cylindre comme la limite de celle d'un prisme, celle d'un cône comme la limite de celle d'une pyramide, ou celle d'une sphère comme la limite d'une série de surfaces de troncs de cônes engendrés par les côtés d'une ligne brisée.

216. — *Surfaces de révolution.* Soit AB la génératrice de la surface ; OX l'axe de révolution, AC et BD les traces des deux plans perpendiculaires à cet axe et qui limitent la surface à évaluer. On peut, à l'aide d'une série de plans perpendiculaires à OX, diviser cette surface en zones élémentaires, telles

que celle qui serait engendrée par l'arc MM'. La corde de cet arc engendre la surface latérale d'un tronc de cône, dont la mesure est $\frac{1}{2}\cdot 2\pi\,(\mathrm{MP}+\mathrm{M'P'})\,.\,\mathrm{MM'}$. Si M' se rapproche indéfiniment du point M', la corde MM' tendra vers l'arc élémentaire ds, et la surface du tronc de cône tendra vers la zone élémentaire $d\mathrm{U}$ de la surface considérée.

En même temps, si y représente l'ordonnée MP, l'ordonnée M'P' ou $y+\Delta y$ tendra vers y. On aura donc à la limite

Fig. 43.

$$d\mathrm{U}=2\pi\, y\, ds\,;$$

et si a et b sont les abscisses qui répondent aux extrémités A et B de la génératrice, on en déduira

$$(1)\qquad \mathrm{U}=2\pi\int_a^b y\,ds=2\pi\int_a^b y\,dx\sqrt{1+y'^2}.$$

L'équation de la génératrice étant donnée par rapport aux axes OX et OY, on en tirera y et y', et l'on calculera l'intégrale définie qui forme le second membre de l'équation (1).

217.—I. Prenons pour premier exemple la *zone sphérique*. En plaçant l'origine au centre du cercle générateur, on aura pour l'équation de ce cercle

$$x^2+y^2=\mathrm{R}^2,$$

d'où l'on tire

$$y'=-\frac{x}{y},$$

et

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}=\frac{\mathrm{R}}{y}.$$

Substituant dans la formule (1), on obtient

$$(2) \qquad U = 2\pi \int_a^b R\,dx = 2\pi R\,(b - a).$$

Ce résultat est conforme à la Géométrie, car il exprime que l'aire d'une zone sphérique a pour mesure la circonférence $2\pi R$ d'un grand cercle multipliée par la hauteur $b - a$ de zone.

II. On peut, comme exercice, calculer la surface engendrée par une cycloïde tournant autour de la droite sur laquelle roule le cercle générateur, c'est-à-dire autour de l'axe des x. On trouvera $U = \frac{64}{3}\pi R^2$, R désignant le rayon du cercle générateur.

218.— III. Nous prendrons encore pour exemple la surface de l'*ellipsoïde de révolution*. Nous supposerons l'ellipsoïde aplati aux pôles, ce qui est le cas du globe terrestre ; c'est-à-dire que nous prendrons pour axe de révolution le petit axe. Nous pourrons écrire alors l'équation de l'ellipse génératrice sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

d'où

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y};$$

mais nous supposerons $b > a$, et nous poserons

$$c^2 = b^2 - a^2.$$

Nous aurons d'abord

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} = \frac{a^4 b^2 + b^2 c^2 x^2}{a^4 y^2},$$

d'où

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{b\sqrt{a^4+c^2x^2}}{a^2 y},$$

et, en substituant dans l'équation (1), et ne prenant que la moitié de l'ellipsoïde,

$$\mathrm{U} = 2\pi \int_0^a \frac{b\,dx\,\sqrt{a^4+c^2x^2}}{a^2} = \frac{2\pi b}{a^2}\int_0^a dx\,\sqrt{a^4+c^2x^2}.$$

Pour effectuer l'intégration, nous poserons

$$x = \frac{a^2}{c}\,u, \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{a^2}{c}\,du\,;$$

et, en substituant,

$$\begin{aligned}\mathrm{U} &= \frac{2\pi a^2 b}{c}\int_0^u du\,\sqrt{1+u^2}\\ &= \frac{2\pi a^2 b}{c}\cdot\frac{1}{2}\left[\log'\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)+u\sqrt{1+u^2}\right],\end{aligned}$$

sans constante, attendu que l'aire doit s'annuler pour $x = 0$ et, par conséquent, pour $u = 0$. Remettant pour u sa valeur $\frac{cx}{a^2}$, on trouve, après réductions,

$$\mathrm{U} = \frac{\pi a^2 b}{c}\log'\left(\frac{cx+\sqrt{a^4+c^2x^2}}{a^2}\right) + \frac{\pi b\,x\sqrt{a^4+c^2x^2}}{a^2}.$$

Faisant enfin $x = a$ et réduisant, on obtient

$$\mathrm{U} = \frac{\pi a^2 b}{c}\log'\left(\frac{b+c}{a}\right) + \pi b^2.$$

L'aire de l'ellipsoïde entier en est le double, ou

(3) $$\frac{2\pi a^2 b}{c}\log'\left(\frac{b+c}{a}\right) + 2\pi b^2.$$

REMARQUE. Cette formule doit redonner l'aire de la sphère quand on suppose $b=a$. Si l'on fait à la fois $a=b$ et $c=0$, le premier terme de l'expression (3) prend la forme $\frac{0}{0}$. Mais le facteur variable de ce terme peut s'écrire, en regardant b comme constant, et mettant à part le facteur $2\pi b$,

$$\frac{(b^2-c^2)}{c}.\log'\left(\frac{b+c}{\sqrt{b^2-c^2}}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{b^2-c^2}{c}\cdot\frac{1}{2}\log'\frac{b+c}{b-c},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\frac{b^2}{c}[\log'(b+c)-\log'(b+c)-\frac{1}{2}c\log'\frac{b+c}{b-c}.$$

Pour $c=0$, le second terme disparaît. Le premier prend la forme $\frac{0}{0}$; mais, en remplaçant le numérateur et le dénominateur par leurs dérivées (81), on trouve

$$\frac{1}{2}b^2\frac{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b-c}}{1};$$

et pour $c=0$, il reste

$$\frac{1}{2}b^2\cdot\frac{2}{b}, \text{ ou } b.$$

La valeur de l'aire est donc

$$2\pi b^2+2\pi b^2, \quad \text{ou} \quad 4\pi b^2,$$

ce qui est bien l'aire de la sphère dont le rayon est b.

219. — *Surface quelconque donnée par son équation.* — Soit ABC une surface courbe dont l'équation est

$$(1) \qquad z=f(x, y).$$

Par des plans DEF, D'E'F' parallèles au plan des zy, on la

décompose d'abord en zones élémentaires telles que DEE'D'; puis, par des plans MPP'M', NQQ'N', parallèles au plan des zx, on subdivise cette zone en quadrilatères curvilignes, tels que MNN'M'. Si les distances telles que FF' et PQ deviennent infiniment petites, ces quadrilatères seront ce que l'on nomme les *éléments* de la surface considérée, et la somme de ces éléments, prise entre les limites convenables, sera l'*aire* de cette surface.

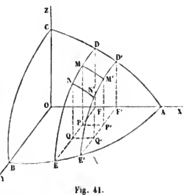


Fig. 41.

Concevons que l'on ait mené le plan tangent en M; les plans MPQN et M'P'Q'N' d'une part, et les plans MPP'M', et NQQ'N' de l'autre, détermineront sur ce plan tangent un quadrilatère qui sera la limite vers laquelle tend MNN'M'. Or, ce quadrilatère déterminé sur le plan tangent a pour projection le rectangle PQQ'P'; en sorte que, si l'on appelle $d\mathrm{U}$ l'élément MNN'M', ou le quadrilatère qui lui correspond sur le plan tangent, et γ l'angle que ce plan tangent fait avec le plan des xy, on aura, par une propriété connue,

$$d\mathrm{U}.\cos\gamma = \mathrm{PQQ'P'} = dx\,dy,$$

d'où

$$d\mathrm{U} = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}.$$

Mais $\cos\gamma$ a pour valeur (139)

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

les lettres p et q désignant les dérivées partielles de z prises par rapport à x et à y. Il vient donc

$$dU = dx\,dy\,\sqrt{p^2 + q^2 + 1},$$

ou

$$(2) \qquad dU = dx\,dy\,\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}.$$

L'aire demandée est la somme des éléments représentés par ces formules, dans laquelle il faut supposer qu'on ait mis pour $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ leurs valeurs tirées de l'équation (1) de la surface. Mais, pour obtenir cette somme, il y a deux intégrations à faire. Si l'on fait d'abord la somme de tous les éléments compris dans la zone élémentaire DEED′, x ne variera pas; mais il faudra faire varier y depuis $y = 0$, qui répond au plan des zx, jusqu'à l'ordonnée FE de la courbe AB. Pour obtenir cette ordonnée, il faut, dans l'équation (1) de la surface, faire $z = 0$, et en tirer y en fonction de x, ce qui donnera une valeur de la forme $y = \varphi(x)$. Cette première intégration, donnant l'aire de la zone DEE′D′, devra donc être faite depuis $y = 0$ jusqu'à $y = \varphi(x)$. C'est-à-dire que l'on prendra d'abord l'intégrale indéfinie, en y regardant x comme constant; et, pour avoir l'intégrale définie, on remplacera successivement y par $\varphi(x)$ et par *zéro*, puis l'on retranchera le second résultat du premier. Le résultat de ce calcul sera une fonction de x, multipliée par le facteur dx.

Il faudra ensuite faire la somme de toutes les zones élémentaires analogues; pour cela, il faudra faire une seconde intégration par rapport à x, et dont les limites seront $x = 0$, qui répond au plan des zy, et $x = OA = a$, qui répond au point A. Le résultat de ce calcul sera l'aire de la portion de la surface comprise dans le premier angle des plans coor-

donnés. On le représente par l'*intégrale double*

$$(3)\qquad U=\int_0^a dx\int_0^{\varphi(x)}dy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1},$$

ou bien

$$U=\int_0^a\int_0^{\varphi(x)}dx\,dy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}.$$

Plus généralement, et c'est notamment ce qui arrive quand la surface ne coupe pas les plans coordonnés, on se propose d'obtenir l'aire de la partie de cette surface qui se projette sur le plan des xy, entre les deux courbes ayant pour équation

$$y=\psi(x),\quad \text{et}\quad y=\varphi(x),$$

et qui peuvent être deux branches d'une même courbe, et les deux parallèles à l'axe des y, qui ont pour équations

$$x=a,\quad \text{et}\quad x=b.$$

On écrit alors

$$(4)\qquad U=\int_a^b\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}dx\,dy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}.$$

Et pour faire ce calcul il faut, comme ci-dessus: 1° *remplacer* $\frac{dz}{dx}$ *et* $\frac{dz}{dy}$ *par leurs valeurs tirées de l'équation* (1) *de la surface;* 2° *intégrer une première fois en regardant* x *comme constant; remplacer ensuite* y *par les limites* φ (x) *et* ψ (x), *et soustraire le second résultat du premier;* 3° *intégrer de nouveau par rapport à* x; *et remplacer enfin* x *par les limites* b *et* a, *et soustraire le second résultat du premier.*

220. — Nous nous proposons, par exemple, d'évaluer l'aire

de la portion de la surface

$$(3)\qquad z=\frac{2}{3}\frac{(x+y)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}},$$

qui se projette entre la droite $x+y=3$, et les axes des x et des y.

On tire d'abord de l'équation (3)

$$\frac{dz}{dx}=\sqrt{\frac{x+y}{2}},\quad \text{et}\quad \frac{dz}{dy}=\sqrt{\frac{x+y}{2}}.$$

Il vient donc, en appelant U l'aire cherchée,

$$\mathrm{U}=\int_0^3\int_0^{3-x}dx\,dy\sqrt{x+y+1}.$$

L'intégrale définie prise par rapport à y est

$$\frac{2}{3}(x+y+1)^{\frac{3}{2}};$$

si l'on met pour y les valeurs $3-x$ et 0, et qu'on retranche le second résultat du premier, on obtient

$$\frac{2}{3}\left[8-(x+1)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Multipliant par dx, et intégrant de nouveau entre les limites 0 et 3, on trouve

$$\frac{2}{3}\left(8.3-\frac{2}{5}.32\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5},$$

ou, en effectuant,

$$\frac{116}{15},\quad \text{ou}\quad 7,733\ldots$$

Ce genre de calcul se rencontre rarement dans les applications.

§ 4. — CALCUL DES VOLUMES TERMINÉS PAR DES SURFACES COURBES.

221. — *Volumes terminés par des surfaces de révolution.* Soit AB la génératrice de la surface, OX l'axe de révolution, OY un axe perpendiculaire au premier, AA′ et BB′ les traces de deux plans perpendiculaires à l'axe OX, et limitant le volume qu'on se propose d'évaluer. On suppose la courbe AB donnée par son équation

Fig. 45.

$$(1) \qquad y = f(x).$$

Menons une ordonnée quelconque MP, et par cette ordonnée faisons passer un plan perpendiculaire à l'axe de révolution. Désignons par V le volume compris entre les plans MP et AA′; ce volume sera une fonction de l'abscisse x du point M.

Si l'on suppose que le point M se transporte en M′, et que OP ou x augmente de PP′ ou Δx, le volume V s'accroîtra du volume élémentaire ΔV engendré par le trapèze curviligne MPP′M′. Mais, si l'on mène MI et M′H parallèles à OX, il est aisé de voir que le volume engendré par ce trapèze est compris entre les volumes engendrés par les rectangles MPP′I et HPP′M′, lesquels sont des cylindres ayant respectivement pour mesure

$$\pi y^2 \Delta x, \quad \text{et} \quad \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x.$$

On a donc

$$\pi y^2 \Delta x < \Delta V < \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x,$$

d'où

$$\pi y^2 < \frac{\Delta V}{\Delta x} < \pi (y + \Delta y)^2.$$

Mais si l'on fait tendre Δx vers zéro, $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ tendra vers la dérivée de V par rapport à x, c'est-à-dire vers $\frac{dV}{dx}$; en même temps $y+\Delta y$ tendra vers y, et les membres extrêmes des inégalités ci-dessus tendront à devenir égaux; on aura donc, à la limite

$$\frac{dV}{dx}=\pi y^2, \quad \text{d'où} \quad dV=\pi y^2 dx,$$

et par conséquent

$$V=\pi\int_a^x y^2\,dx, \tag{2}$$

en appelant a l'abscisse du point A.

Pour avoir la valeur comprise entre les plans AA′ et BB′, il suffira de remplacer la limite x de l'intégrale définie (2) par l'abscisse du point B, que nous désignerons par b. Nous aurons ainsi

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx. \tag{3}$$

Et, pour effectuer le calcul, il suffira de remplacer y par sa valeur tirée de l'équation (1) de la génératrice, et d'effectuer l'intégration entre les limites indiquées.

Remarque. — La figure suppose l'ordonnée y croissante; si elle était décroissante, les mêmes raisonnements subsisteraient; il n'y aurait de changé que le sens des inégalités qui nous ont servi de point de départ.

222. I. — Nous appliquerons d'abord la formule (3) à l'ellipsoïde de révolution. L'axe de révolution étant, par exemple, le grand axe, et le centre étant pris pour origine, on aura

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2);$$

et, par suite,

$$(4)\quad V = \pi \frac{b^2}{a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2 - x^2)\,dx = \pi \frac{b^2}{a^2}\left(2a^3 - \frac{2}{3}a^3\right) = \frac{4}{3}\pi b^2 a.$$

II. Nous prendrons pour second exemple le paraboloïde de révolution, terminé par un plan perpendiculaire à l'axe de la parabole, qui est l'axe de révolution.

En mettant l'origine au sommet, on aura

$$y^2 = 2px,$$

et, par suite,

$$(5)\qquad V = \pi . 2p\int_0^x x\,dx = \pi . p . x^2 = \frac{1}{2}\pi . y^2 x,$$

c'est-à-dire que ce volume est la moitié du cylindre qui a pour rayon y et pour hauteur x.

III. On peut, comme exercice, appliquer la formule (3) au volume engendré par la cycloïde tournant autour de la droite sur laquelle roule le cercle générateur, c'est-à-dire autour de l'axe des x. On trouvera

$$V = 5\pi^2 R^3,$$

R désignant le rayon du cercle générateur.

223. — *Volume de l'ellipsoïde à trois axes inégaux.* Ce volume peut être obtenu par une seule intégration, en remarquant que, dans l'ellipsoïde, toutes les sections parallèles sont des ellipses semblables. Soit OABC la portion de l'ellipsoïde comprise dans le premier angle des axes; soient $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ les trois demi-axes. Menons deux plans très-voisins MNP, M'N'P' parallèles

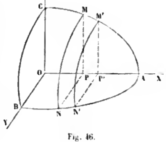


Fig. 46.

au plan des zy; ils comprendront entre eux un élément ΔV du volume que nous cherchons. Or, ce volume est compris entre les deux cylindres à base elliptique qui ont pour hauteur commune PP′ ou Δx, et pour base l'un l'ellipse MNP, dont un quadrant seulement est représenté sur la figure, l'autre l'ellipse M′N′P′. Si l'on fait tendre PP′ vers zéro, ces deux cylindres tendront l'un vers l'autre; il en sera donc de même de l'élément ΔV compris entre eux; et à la limite on pourra écrire

$$dV = \text{ellipse MNP} \times dx$$

Si Ω désigne l'ellipse CBO, et ω l'ellipse MNP, on a, à cause de leur similitude,

$$\omega : \Omega = \overline{MP}^2 : \overline{OC}^2,$$

d'où, en désignant MP par z,

$$\omega = \Omega \, . \frac{z^2}{c^2}.$$

Par conséquent

$$dV = \frac{\Omega}{c^2} z^2 dx.$$

Mettons pour z^2 sa valeur en x tirée de l'équation de l'ellipse AC, et intégrons entre les limites $-a$ et $+a$, il viendra

$$V = \frac{\Omega}{c^2} \cdot \frac{c^2}{a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)\, dx = \frac{\Omega}{a^2} \cdot \frac{4}{3} a^3 = \frac{4}{3} \Omega a.$$

Mais $\Omega = \pi bc$. Il vient donc enfin

(6) $$V = \frac{4}{3} \pi abc.$$

On peut suivre la même marche pour obtenir le volume

d'un segment de paraboloïde elliptique, terminé par un plan perpendiculaire à son axe principal. Si son équation est

$$\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=x,$$

on trouvera pour l'expression du volume dont il s'agit

$$V=\frac{1}{2}\pi xyz;$$

c'est la moitié du cylindre ayant pour base la même ellipse πyz, et la même hauteur x.

224. *Volume terminé par une surface quelconque dont on a l'équation.* Reportons-nous à la figure et aux notations du n° 219. En employant le même mode de décomposition, on divisera le volume demandé en éléments prismatiques tels que MNN'M'PQQ'P. Soient z' la plus grande et z'' la plus petite des quatre ordonnées MP, M'P', NQ, N'Q'; l'élément de volume considéré ΔV sera évidemment compris entre les deux prismes qui ont pour base commune PQQ'P' et pour hauteur l'un z', l'autre z'', prismes qui ont pour mesure $z'\,\Delta x\,\Delta y$ et $z''\,\Delta x\,\Delta y$. Mais si Δx et Δy tendent simultanément vers zéro, z' et z'' tendront vers l'ordonnée du point M, c'est-à-dire vers z; on aura donc à la limite

$$dV=z\,dx\,dy,$$

et la somme de tous les éléments analogues à dV, prise entre les limites convenables, sera le volume V que l'on se propose d'obtenir.

Pour trouver cette somme, on aura deux intégrations à effectuer, comme au n° 219.

Dans le cas de la figure, on aura

$$V=\int^{a}\int_{0}^{\varphi(x)} z\,dx\,dy, \tag{7}$$

$\varphi(x)$ désignant l'ordonnée de la courbe AB, et a la longueur OA.

Si le volume cherché est compris entre les cylindres ayant pour équation $y = \psi(x)$ et $y = \varphi(x)$, et les plans $x = a$, $x = b$, on devra écrire

$$\text{(8)} \qquad V = \int_a^b \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} z\,dx\,dy.$$

Pour effectuer le calcul indiqué, on remplacera d'abord z par sa valeur tirée de l'équation de la surface; on intégrera par rapport à y en regardant d'abord x comme constant, et, dans l'intégrale indéfinie obtenue, on remplacera y par les limites $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ et l'on retranchera le second résultat du premier. On obtiendra ainsi une fonction de x, que l'on multipliera par dx, et l'on intégrera par rapport à x, entre les limites a et b; ce qui donnera le volume que l'on cherche.

Il est important de se bien pénétrer du sens qu'il faut attacher à une *intégrale double*, telle que la formule (8), sens qui est expliqué par la règle dont nous venons de donner le détail.

Remarques. 1. Comme z peut être considéré comme l'intégrale de dz, on écrit quelquefois la valeur du volume V sous la forme

$$V = \int_a^b \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \int_0^{f(x,\,y)} dx\,dy\,dz.$$

On a alors ce que l'on appelle une *intégrale triple*. On intègre une première fois par rapport à z, et l'on met pour z les limites $f(x, y)$ et zéro, et l'on retranche; on intègre une seconde fois par rapport à y, et l'on met pour y ses limites $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, et l'on retranche; on intègre enfin, une troisième fois, par rapport à x; on met pour x ses limites b et a, et l'on retranche.

Il est rare qu'on ait à effectuer un calcul de ce genre pour le besoin des applications.

II. Le volume, au lieu d'être limité inférieurement par le plan des xy, pourrait l'être par une autre surface donnée $z = f_1(x, y)$. Les limites de z, au lieu d'être $f(x, y)$ et zéro, seraient alors $f(x, y)$ et $f_1(x, y)$. Cela ne changerait rien à la marche du calcul.

225. — Proposons-nous, comme exemple, de calculer le volume compris entre la surface qui a pour équation $z = xy^2$, le plan des xy, les cylindres représentés par les deux équations $y = -\sqrt{2px}$ et $y = -\sqrt{2px}$, et les deux plans qui ont pour équation $x = 0$ et $x = a$. Nous aurons

$$V = \int_0^a \int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} . xy^2 . dx\, dy.$$

L'intégration par rapport à y donne

$$\frac{1}{3} x . y^3 + \text{const.};$$

et, en substituant à y ses limites, et faisant la soustraction,

$$\frac{1}{3} x . 2(2px)^{\frac{3}{2}} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3}(2p)^{\frac{3}{2}} . x^{\frac{5}{2}}.$$

Multipliant par dx et intégrant de 0 à a, on obtient

$$\frac{2}{3}(2p)^{\frac{3}{2}} . \frac{2}{7} . a^{\frac{7}{2}} \quad \text{ou} \quad \frac{4}{21}(2pa)^{\frac{3}{2}} . a^2,$$

ou, en nommant b l'ordonnée de la parabole $y^2 = 2px$ qui répond à l'abscisse a,

$$V = \frac{4}{21} . b^3 a^2.$$

226. — *Calcul des volumes par approximation.* Lorsque les intégrations nécessaires pour obtenir le volume d'un corps ne peuvent pas s'effectuer, ou lorsque le corps a une forme irrégulière qui se refuse à toute définition géométrique, ce volume ne peut s'obtenir que par approximation. Afin d'en donner un exemple, nous supposerons qu'il s'agisse d'obtenir le volume d'un monticule de terre donné par son contour apparent sur le plan vertical de projection et par la projection horizontale de ses courbes de niveau.

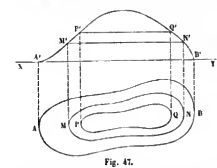


Fig. 47.

Concevons qu'on ait divisé ce volume par des plans horizontaux en tranches très-minces ; et soit M'N'P'Q', MNPQ l'une de ces tranches. Désignons par ω l'aire de la section M'N', MN, par z sa distance au plan horizontal de projection ; soit Δz la distance des plans M'N' et P'Q' ; $\omega - \Delta\omega$ l'aire de la section P'Q', PQ. La tranche considérée, dont nous représenterons le volume par ΔV, sera comprise entre les deux cylindres qui ont pour hauteur commune Δz et pour bases ω et $\omega - \Delta\omega$; on a donc

$$\omega\Delta z > \Delta V > (\omega - \Delta\omega)\,\Delta z,$$

d'où

$$\omega > \frac{\Delta V}{\Delta z} > \omega - \Delta\omega.$$

Mais si Δz tend vers zéro, les membres extrêmes tendent à devenir égaux tous deux à ω ; en même temps $\frac{\Delta V}{\Delta z}$ tend vers

$\frac{dV}{dz}$; on a donc à la limite

$$\frac{dV}{dz}=\omega, \quad \text{d'où} \quad dV=\omega dz,$$

et, par conséquent, si h désigne la hauteur totale du monticule,

$$V=\int_0^h \omega dz.$$

Comme ω n'est pas donné en fonction de z, on fera usage de la formule de Th. Simpson (196). On divisera la hauteur h en un nombre pair n de parties égales ; par tous les points de division on mènera des plans horizontaux, qui détermineront dans le monticule autant de sections, que nous représenterons, en les numérotant à partir du bas, par ω_0, ω_1, ω_2 ... ω_n ; en vertu de la formule citée, on aura donc

$$(9) \quad V=\frac{h}{3n}\left[(\omega_0+\omega_n)+4(\omega_1+\omega_3+\ldots)+2(\omega_2+\omega_4+\ldots)\right].$$

Dans cette formule ω_n est nul, et nous ne l'avons conservé que pour la symétrie.

Comme les aires ω_0, ω_1, ω_2, ... ne peuvent être elles-mêmes obtenues que par approximation, l'emploi de la formule (9) est assez pénible. Mais comme, dans les questions où l'on a recours à cette méthode, dans les questions de terrassements et de transport des terres par exemple, une exactitude rigoureuse n'est pas nécessaire, on a soin de ne pas prendre le nombre n trop grand, afin de ne pas avoir un trop grand nombre de sections à déterminer ; et, toutes les fois que cela est possible, on se sert des courbes de niveau déjà figurées sur le plan du terrain.

IV. DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET DE LEUR INTÉGRATION.

§ I. DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

227. — On appelle *équation différentielle* toute équation qui contient, indépendamment des variables, leurs différentielles ou leurs dérivées d'ordre quelconque.

Les équations différentielles que l'on rencontre le plus fréquemment dans les applications, sont celles qui ne renferment que deux variables, dont l'une est considérée comme indépendante, et les dérivées de la première par rapport à cette variable indépendante. Ce sont les *équations différentielles ordinaires*.

On rencontre aussi des équations différentielles renfermant plusieurs variables, dont une seule indépendante, et les dérivées des premières par rapport à celles-ci ; par exemple, quatre variables x, y, z, t, et les dérivées de x, de y et de z par rapport à t. Ces équations se présentent alors par groupes et forment ce que l'on appelle un système d'équations différentielles *simultanées*.

On peut avoir à déterminer une fonction de plusieurs variables indépendantes, deux par exemple, connaissant la différentielle totale de cette fonction exprimée, soit à l'aide des variables indépendantes seulement, soit à l'aide de ces variables et de la fonction elle-même. C'est ce que l'on appelle une *équation aux différentielles totales*.

Enfin, on peut avoir à traiter des équations différentielles renfermant trois variables, dont une fonction des deux autres, et les dérivées partielles de la première par rapport à ces deux autres; c'est ce que l'on appelle improprement une équation aux *différences partielles*.

228. — *Intégrer* une équation différentielle, c'est remonter

de cette équation entre les variables et leurs dérivées à la relation primitive qui lie les variables elles-mêmes. Cette relation primitive est dite l'*équation intégrale* de l'équation différentielle proposée. Ainsi l'équation différentielle

$$f'_x(x, y) + y'f'_y(x, y) = 0$$

a pour intégrale

$$f(x, y) = \text{constante}.$$

De même que l'on démontre en algèbre que *toute équation a une racine*, on démontre, dans le calcul intégral, que *toute équation différentielle a son équation intégrale*. Mais la démonstration de cette proposition peut être omise dans une première étude, et nous renverrons, à cet égard, aux traités spéciaux, et particulièrement au *Cours de calcul différentiel et intégral* de M. Serret, tome II, page 353 et suivantes.

229. — Les équations différentielles ordinaires se classent entre elles d'après l ordre le plus élevé des dérivées qui y entrent. Si, par exemple, il s'agit d'une équation différentielle entre deux variables x et y, elle sera dite du *premier ordre* si elle contient y', du *second ordre* si elle contient y'', du *troisième ordre* si elle contient y''', et ainsi de suite.

Il en est de même pour les systèmes d'équations différentielles simultanées.

Il en est de même encore pour les équations aux différences partielles. Si, par exemple, il s'agit d'une équation aux différences partielles entre trois variables x, y, z, dont l'une z est fonction des deux autres, elle sera dite du *premier ordre*, si elle renferme les dérivées partielles du premier ordre $\frac{dz}{dx}$ ou $\frac{dz}{dy}$; elle sera du *second ordre*, si elle renferme les dérivées partielles du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, ou $\frac{d^2z}{dy^2}$; et de même pour les ordres supérieurs.

Nous nous occuperons d'abord de l'intégration des équations différentielles ordinaires, en commençant par le premier ordre.

§ 2. — DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES DU PREMIER ORDRE, A DEUX VARIABLES.

230. — On a vu, dans le calcul différentiel (31), que si l'on a une équation entre deux variables x et y, telle que ces variables y soient séparées, comme dans l'équation

$$\varphi(y) = \psi\, x), \tag{1}$$

on en tire par la différentiation

$$\varphi'(y)\, dy = \psi'(x)\, dx, \tag{2}$$

c'est-à-dire que l'on peut égaler les différentielles des deux membres. Réciproquement, si l'on a une équation différentielle telle que l'équation (2), dans laquelle les variables sont séparées, elle exprime que les différentielles des fonctions primitives φ et ψ sont constamment égales, et que par conséquent ces fonctions croissent de quantités toujours égales, d'où il résulte que leur différence ne change pas, ou, en d'autres termes, que ces fonctions primitives ne peuvent différer que par une constante. On peut donc déduire de l'équation différentielle (2) la relation

$$\varphi(y) = \psi(x) + C, \tag{3}$$

C désignant une constante arbitraire. La relation (3) est l'intégrale de l'équation différentielle (2).

On voit que *lorsque, dans une équation différentielle du premier ordre à deux variables, ces variables sont séparées, il suffit, pour obtenir l'équation intégrale, d'intégrer séparément les deux membres, et d'ajouter à l'un d'eux une constante*

arbitraire. La relation ainsi obtenue est l'*intégrale générale*; si l'on attribue une valeur particulière à la constante arbitraire, on obtient ce que l'on appelle une *intégrale particulière*.

Soit, par exemple, l'équation différentielle très-simple

$$\frac{dy}{y} = m\,dx, \tag{4}$$

on en tirera

$$\log'.y = mx + C,$$

d'où

$$y = e^{mx+C}, \quad \text{ou} \quad y = Ae^{mx}, \tag{5}$$

en posant $A = e^C$. Si l'on attribue à A des valeurs particulières, on aura autant d'intégrales particulières de l'équation différentielle (4); et la relation (5) sera l'intégrale générale.

231. — La première chose à faire pour intégrer une équation différentielle du premier ordre à deux variables est donc de séparer les variables s'il est possible. Il suffit le plus souvent pour cela de transformations algébriques analogues à celles qu'on fait subir aux équations du premier degré, qu'on veut résoudre, c'est-à-dire que l'on réunit en un seul tous les termes qui contiennent le facteur dy, et en un seul aussi tous ceux qui contiennent le facteur dx; il ne saurait y avoir de terme indépendant de dy et de dx, car il faut pour l'homogénéité que tous les termes soient infiniment petits. En divisant ou en multipliant alors par un facteur convenable, on mettra l'équation sous la forme (2), et les variables seront séparées.

Soit donnée, par exemple, l'équation différentielle

$$x\,dy - y\,dx = dy\sqrt{1+x^2} + dx\sqrt{1+y^2},$$

on la mettra sous la forme

$$\frac{dy}{y+\sqrt{1+y^2}}=\frac{dx}{x-\sqrt{1+x^2}}.$$

Pour intégrer ensuite chaque membre, il suffira de multiplier et de diviser le premier par $y-\sqrt{1+y^2}$, et le second par $x+\sqrt{1+x^2}$; nous ne nous arrêterons pas à achever ce calcul.

On peut remarquer que les variables se séparent immédiatement quand l'équation différentielle est de la forme

$$y'=\varphi(x).\psi(y),$$

car on en tire

$$\frac{dy}{\psi(y)}=\varphi(x)dx.$$

Si, par exemple, on avait à intégrer

$$y'=x^2(1+y^2),$$

on obtiendrait d'abord

$$\frac{dy}{1+y^2}=x^2dx;$$

et, en effectuant les intégrations,

$$\text{arc tang } y=\frac{1}{3}x^3+\text{const.}$$

Toutes les fois qu'on a réussi à séparer les variables, la question est dite *ramenée aux quadratures*, parce qu'on n'a plus à effectuer que des intégrations analogues à celles qu'il faut exécuter pour calculer l'aire d'une courbe.

232. — Quand l'équation différentielle proposée est homogène en x et y, c'est-à-dire quand tous les facteurs qui multi-

plient soit dx, soit dy, sont du même degré, on parvient aisément à séparer les variables en posant $y = ux$, u désignant une variable auxiliaire.

Soit

$$\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy = 0,$$

l'équation différentielle proposée, dans laquelle les fonctions φ et ψ sont supposées homogènes et du degré m. En mettant ux à la place de y, ces fonctions acquerront le facteur x^m, que l'on pourra supprimer ; et, en remplaçant dy par sa valeur

$$u\,dx + x\,du,$$

il viendra

$$\varphi(1, u)\, dx + \psi(1, u)\,(u\,dx + x\,du) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(1, u)\,.\,du}{\varphi(1, u) + u\,\psi(1, u)} = 0,$$

équation dans laquelle les variables sont séparées.

Prenons pour exemple l'équation

$$x\,dy - y\,dx = dx\sqrt{x^2 + y^2};$$

on la transforme en

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}},$$

d'où

$$\log' x = \log'\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right) + \text{const.},$$

ou, en désignant par c une constante,

$$\frac{x}{c} = u + \sqrt{1 + u^2} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}},$$

équation qui revient à

$$x^2 - 2cy - c^2 = 0.$$

L'équation différentielle proposée résulte, en effet, de l'élimination de la constante c entre cette relation et sa différentielle.

233. — On sépare encore les variables quand l'équation différentielle proposée est *linéaire* par rapport à y' et à y, c'est-à-dire lorsque ces deux quantités n'y entrent qu'au premier degré et n'y sont point multipliées entre elles. Une équation de ce genre peut toujours se mettre sous la forme

(1) $$y' + y\varphi(x) = f(x).$$

On pose alors

(2) $$y = uv,$$

u et v étant deux fonctions indéterminées de x. On en déduit

$$dy = u\,dv + v\,du,$$

et, en substituant dans l'équation (1), après avoir multiplié par dx,

(4) $$u\,dv + v\,du + uv\,\varphi(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

On voit alors que l'on peut satisfaire à cette relation en posant séparément

(4) $$u\,dv = f(x)\,dx$$

et

(5) $$du + u\,\varphi(x)\,dx = 0.$$

La relation (5), mise sous la forme

$$\frac{du}{u} + \varphi(x)\,dx = 0,$$

donne, en intégrant,

$$\log'.u + \int \varphi(x)\,dx = \text{const.}$$

ou, en désignant par X l'intégrale $\int \varphi(x)\,dx$, dans laquelle on peut faire entrer la constante,

$$\log'.u + X = 0,$$

d'où

$$u = e^{-X}.$$

Mettant pour u cette valeur dans la relation (4), on obtient

$$e^{-X}.dv = f(x) \quad \text{ou} \quad dv = e^{X} f(x)\,dx,$$

d'où

$$(6) \qquad v = \int e^{X} f(x)\,dx.$$

Par suite, il vient

$$(7) \qquad y = e^{-X}.\int e^{X} f(x)\,dx.$$

Cette méthode conduira donc à l'intégrale cherchée toutes les fois que l'on pourra effectuer les deux quadratures exprimées par $X = \int \varphi(x)\,dx$, et par l'équation (6).

Prenons pour exemple l'équation

$$y' + y = -ax.$$

On aura ici

$$\varphi(x) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = -ax\,;$$

par conséquent

$$X = \int 1.\,dx = x,$$

d'où

$$u = e^{-x},$$

et

$$v = -\int e^{x} \,.\, ax\,dx = a(1-x)e^{x} + C.$$

Par suite

$$y = e^{-x} \,.\, [a(1-x)e^{x} + C],$$

ou

$$y = a(1-x) + Ce^{-x}.$$

234. — On ramène au cas précédent l'équation différentielle

$$y' + y\varphi(x) = y^{n} f(x).$$

Pour cela, on pose

$$y = u^{k}, \quad \text{d'où} \quad y' = k u^{k-1} \,.\, u',$$

et, en substituant,

$$k u^{k-1} \,.\, u' + u^{k} \varphi(x) = u^{kn} f(x),$$

puis en divisant par $k u^{k-1}$,

$$u' + u \,.\, \frac{\varphi(x)}{k} = u^{kn-k+1} \,.\, \frac{f(x)}{k}.$$

Pour que cette équation devienne de même forme que l'équation (1) du numéro précédent, il suffit que l'on ait

$$kn - k + 1 = 0,$$

d'où

$$k = -\frac{1}{n-1}.$$

235. — La séparation des variables n'est pas le seul procédé qui puisse être mis en usage pour intégrer les équations

différentielles du premier ordre à deux variables. Une pareille équation peut toujours être mise sous la forme

$$(1) \qquad M\,dx + N\,dx = 0,$$

M et N étant des fonctions de x et de y. Or il peut se faire que le premier membre de cette équation soit la différentielle exacte d'une fonction des deux variables x et y, considérées comme indépendantes. Si $f(x, y)$ est cette fonction, l'intégrale générale cherchée est alors

$$f(x, y) = \text{const.}$$

Soit, par exemple, l'équation différentielle

$$(2) \qquad \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0.$$

On reconnaît que le premier membre est la différentielle exacte de l'arc dont la tangente est $\frac{y}{x}$; on aura donc l'intégrale générale en posant

$$\text{arc tang}\,\frac{y}{x} = \text{const.},$$

ce qui revient à $y = cx$, c désignant une constante arbitraire.

Mais pour que le premier membre de l'équation (1) soit une différentielle exacte, il faut (55) que la dérivée de M par rapport à y soit égale à la dérivee de N par rapport à x ; car M et N sont les dérivées partielles du premier ordre de la fonction f.

Cette condition est remplie par l'équation (2). Or elle ne le serait pas par l'équation plus simple

$$(3) \qquad x\,dy - y\,dx = 0,$$

puisque la dérivée de x par rapport à x est $+1$, tandis que la dérivée de $-y$ par rapport à y est -1. Le premier membre de l'équation (3) n'est donc pas la différentielle exacte d'une fonction des deux variables x et y. Mais on la rendrait différentielle exacte en multipliant le premier membre par le facteur $\frac{1}{x^2+y^2}$. On démontre qu'il existe toujours un facteur propre à rendre $M\,dx + N\,dy$ une différentielle exacte; mais la recherche de ce facteur dépend de l'intégration d'une équation aux différences partielles, c'est-à-dire d'un calcul plus difficile que le calcul directement proposé.

D'ailleurs, les exemples simples que l'on donne d'ordinaire peuvent toujours se traiter par la séparation des variables. Nous n'insisterons donc pas sur la méthode du *facteur propre* à rendre le premier membre de (1) intégrable.

236. — Lorsque aucune des méthodes précédemment exposées ne peut réussir, on peut, pour se faire une idée de l'équation intégrale que l'on cherche, avoir recours à un procédé graphique qui, bien qu'il ne soit qu'assez grossièrement approximatif, rend parfois des services dans les applications.

L'équation différentielle proposée peut toujours être mise sous la forme

$$(1) \qquad y' = f(x, y).$$

Or l'équation intégrale cherchée peut être regardée comme l'équation d'une courbe, et la relation (1) donne alors la valeur du coefficient angulaire de la tangente à cette courbe au point qui a pour coordonnées x, y.

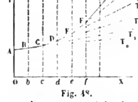


Fig. 19.

Cela posé, ayant tracé deux axes rectangulaires OX et OY, on mènera une série de droites bB, cC, dD, eE, fF, équidis-

tantes et parallèles à l'axe des y. Puis on prendra sur l'axe des y un point arbitraire A, à une distance y_0 de l'origine, et on admettra que la courbe cherchée passe par ce point A. On mettra dans le second membre de l'équation (1) les valeurs $x=0$ et $y=y_0$ qui sont les coordonnées du point A ; cette équation donnera alors l'inclinaison de la tangente en A à la courbe; et l'on pourra tracer cette tangente AT_0. Son équation est

$$(2) \qquad y-y_0=f(0,y_0).x.$$

Soit h l'intervalle de deux parallèles consécutives à l'axe des y. L'abscisse du point B où la tangente AT_0 coupe bB sera h, et l'on obtiendra son ordonnée en faisant $x=h$ dans l'équation (2). Soit y_1 cette ordonnée. En négligeant les quantités très-petites du second ordre, on pourra regarder le point B comme étant sur la courbe cherchée. On fera $x=h$ et $y=y_1$ dans la relation (1), qui donnera l'inclinaison de la tangente en B ; et l'on pourra tracer cette tangente BT_1. Son équation sera

$$(3) \qquad y-y_1=f(h,y_1).(x-h).$$

L'abscisse du point C où cette tangente coupe cC sera $2h$, et l'on obtiendra son ordonnée en faisant $x=2h$ dans l'équation (3). Soit y_2 cette ordonnée. On admettra, comme ci-dessus, que le point C appartient à la courbe cherchée. On fera $x=2h$ et $y=y_2$ dans la relation (1), qui donnera l'inclinaison de la tangente en C ; et l'on pourra tracer cette tangente CT_2. Son équation sera

$$(4) \qquad y-y_2=f(2h,y_2)(x-2h).$$

L'abscisse du point D où cette tangente coupe dD sera $3h$, et l'on obtiendra son ordonnée en faisant $x=3h$ dans l'équation (4). On admettra encore que le point D est sur la courbe cherchée. En continuant ainsi, on obtiendra une ligne brisée

ABCDEF... qui approchera d'autant plus de la courbe cherchée que l'intervalle h aura été choisi plus petit, et qui, dans beaucoup de cas, donnera une idée suffisante de la forme de la courbe. Le choix arbitraire que l'on fait du point A tient lieu dans cette opération de la constante arbitraire qui doit entrer dans l'équation intégrale.

Si l'ordonnée devenait infinie, la construction serait en défaut ; mais on peut faire disparaître cette circonstance en renversant l'équation (1) et écrivant

$$(5) \qquad \frac{dx}{dy} = x' = \frac{1}{f(x, y)}.$$

Au lieu de parallèles à l'axe des y, on emploierait alors des parallèles à l'axe des x. En employant avec discernement ces deux moyens, on peut presque toujours avoir, par aperçu, la forme de la courbe cherchée dans la région où l'on a intérêt à la connaître.

237. — Une équation différentielle du premier ordre à deux variables peut être d'un degré supérieur au premier. Si, par exemple, elle ne contient que la première dérivée y', mais que cette dérivée y entre au second degré, l'équation différentielle sera du premier ordre, mais du second degré.

Dans ce cas, ce qu'il y a de plus simple à faire est de résoudre l'équation par rapport à y' ; on obtiendra ainsi deux équations séparées du premier degré, que l'on intégrera séparément, s'il est possible, par l'une des méthodes exposées ci-dessus. On obtiendra ainsi deux équations intégrales telles que

$$(1) \qquad y - f_1(x, c_1) = 0 \quad \text{et} \quad y - f_2(x, c_2) = 0,$$

c_1 et c_2 désignant des constantes arbitraires. Et l'intégrale générale sera le produit de ces deux équations membre à

membre, savoir :

(2) $$[y - f_1(x, c_1)][y - f_2(x, c_2)] = 0\,;$$

car en différentiant celle-ci, on obtient

(3) $$\left\{\begin{aligned} &[y - f_1(x, c_1)][y' - f_2'(x, c_2)] \\ &+ [y - f_2(x, c_2)][y' - f_1'(x, c_1)] = 0, \end{aligned}\right.$$

relation qui est évidemment satisfaite, soit que l'on adopte la solution

$$y - f_1(x, c_1) = 0,$$

d'où

$$y' - f'_1(x, c_1) = 0,$$

soit qu'on adopte la solution

$$y - f_2(x, c_2) = 0,$$

d'où

$$y' - f'_2(x, c_2) = 0.$$

On peut même remarquer que l'on ne diminue pas la généralité de l'intégrale (3) en supposant $c_1 = c_2$, attendu que ces deux constantes n'entrent jamais à la fois dans la solution que l'on choisit.

Soit proposée, par exemple, l'équation

$$y'^2 - 2ay' + a \sin^2 x = 0\,;$$

on en tirera

$$y' = a \pm a\sqrt{1 - \sin^2 x} = a\,(1 \pm \cos x),$$

d'où, en intégrant,

$$y = ax + c \pm a \sin x.$$

L'intégrale générale sera donc

$$(y - ax - c - a\sin x)(y - ax - c + a\sin x) = 0$$

ou

$$(y - ax - c)^2 - a^2\sin^2 x = 0.$$

Si l'équation différentielle proposée était du degré n en y', on verrait de même qu'on obtient l'intégrale générale en déterminant les n valeurs de y', intégrant les n équations différentielles du premier degré ainsi obtenues, passant tous les termes de chacune dans le premier membre, et multipliant membre à membre toutes ces équations, dans lesquelles il est permis, sans diminuer pour cela la généralité de l'équation intégrale, de représenter les constantes arbitraires par une même lettre. Mais on rencontre rarement, dans les applications, une équation différentielle d'un degré supérieur au second.

Lorsque l'équation différentielle ne peut être résolue par rapport à y', ou lorsque les équations différentielles du premier degré en y' que l'on en tire ne peuvent être intégrées, l'intégrale générale ne peut être obtenue, sauf les cas particuliers où l'on peut avoir recours à quelque artifice que l'habitude du calcul suggère. On en trouvera des exemples dans les traités plus étendus.

238. — Il peut arriver qu'une équation différentielle du premier ordre à deux variables soit satisfaite par une relation entre ces variables tout à fait distincte de l'intégrale générale; et ne pouvant pas s'en déduire ; ce n'est point alors une intégrale particulière, et on lui donne le nom de *solution singulière* *.

* Quelques auteurs adoptent le nom de *solution particulière;* mais, dans ce cas, il faut éviter de confondre ce nom avec l'expression d'*intégrale particulière*.

Quelques considérations géométriques feront comprendre l'origine de ces solutions.

Soit

$$(1) \qquad f(x, y, y') = 0$$

l'équation différentielle proposée, et soit

$$(2) \qquad F(x, y, c) = 0$$

son intégrale générale. Cette équation (2) représente une famille de courbes, dont l'*enveloppe* (106) a pour équation l'équation qui résulte de l'élimination de la constante c entre $F(x, y, c) = 0$ et sa dérivée par rapport à c. Soit

$$(3) \qquad \varphi(x, y) = 0$$

l'équation de l'enveloppe. On a vu que le caractère géométrique de cette courbe est d'être tangente à toutes celles qui sont comprises dans l'équation (2). Par conséquent, si x et y désignent les coordonnées du point de contact entre l'enveloppe et l'une des enveloppées, on obtiendra pour y' la même valeur, soit qu'on la tire de l'équation différentielle proposée (1), soit qu'on la tire de l'équation (3) de l'enveloppe. Il en résulte que l'équation (3) satisfait à l'équation (1), bien qu'elle ne soit pas en général comprise dans l'équation (2). Ce n'est donc pas une intégrale particulière, comprise dans l'intégrale générale ; c'est une solution singulière.

Considérons, par exemple, l'équation

$$(4) \qquad \frac{x}{c} + \frac{y}{m - c} = 1,$$

qui représente une famille de droites, lorsqu'on y fait varier la constante c.

Si on la différentie, ce qui donne

$$(5) \qquad \frac{1}{c} + \frac{y'}{m - c} = 0,$$

et que l'on élimine c entre les relations (4) et (5), on obtient, après réductions, l'équation

$$(6) \qquad x[xy'^2 - (x+y-m)y' + y] = 0,$$

qui est l'équation différentielle de toutes les droites représentées par l'équation (4).

On peut remarquer qu'elle est satisfaite par $x=0$; mais cette solution provenant du facteur x, qui peut être supprimé, n'est point la solution singulière. Si l'on cherche l'équation de l'enveloppe des droites (4), et que pour cela on élimine c entre cette équation et sa dérivée par rapport à c, on obtient (108)

$$(7) \qquad (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = m \quad \text{ou} \quad y = x + m - 2\sqrt{mx},$$

qui est l'équation d'une parabole. Or, si l'on différentie cette dernière, on en tire

$$y' = 1 - \sqrt{\frac{m}{x}},$$

valeur qui, substituée dans l'équation différentielle (6), satisfait à cette équation. L'équation (7) est donc la solution singulière.

239. — Lorsque, comme dans l'exemple précédent, on a l'intégrale générale, on voit qu'il est facile d'en déduire la solution singulière, s'il y en a une, puisqu'il suffit d'opérer comme s'il s'agissait de trouver l'équation de l'enveloppe des lignes représentées par l'intégrale générale.

Mais lorsqu'on n'a pas l'intégrale générale, il faut opérer d'une autre manière, que les considérations géométriques aideront encore à comprendre.

Soit M le point de contact de l'enveloppe avec l'une des enveloppées. Cette enveloppée est coupée par une enveloppée infiniment voisine en un point M′ infiniment voisin du point M ;

et, au point M', ces deux enveloppées ont généralement des tangentes distinctes ; c'est-à-dire qu'au point M' la dérivée y' a deux valeurs différentes, selon que l'on considère l'une ou l'autre des deux enveloppées dont il s'agit. Mais, si l'on fait tendre le point M' vers le point M, chacune des deux tangentes dont il s'agit tend vers la tangente en M ; par conséquent, au point M lui-même, les deux valeurs de y' qui étaient distinctes se confondent en une seule, c'est-à-dire que l'équation $f(x, y, y') = 0$ donne, en ce point, pour y', deux valeurs égales. Or le caractère des racines multiples, c'est que la dérivée de la fonction devient nulle ; au point M on doit donc avoir

$$\frac{df}{dy'} = 0 ;$$

et, si l'on élimine y' entre les équations $f(x, y, y') = 0$ et $\frac{df}{dy'} = 0$, on obtiendra une relation entre x et y qui appartiendra à tous les points de l'enveloppe ; ce sera donc la solution singulière qu'il s'agissait d'obtenir.

Dans l'exemple du numéro précédent, si l'on égale à zéro la dérivée, par rapport à y' du premier membre de l'équation (6) débarrassée du facteur étranger x, on obtient

$$2xy' - (x + y - m) = 0,$$

et, en éliminant y' entre cette relation et l'équation (6), on trouve

$$y = x + m \mp 2\sqrt{mx},$$

c'est-à-dire qu'on retombe sur l'équation (7), attendu que, dans l'une ou l'autre, le radical porte nécessairement avec lui le double signe. Ainsi on retrouve, par cette méthode, la solution singulière qui avait été déduite de l'intégrale générale.

Mais, pour le succès de la méthode, il faut avoir soin de préparer l'équation différentielle de manière à ne pas contenir de radicaux. Nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet.

§ 3. — DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE, A DEUX VARIABLES.

240. — Dans le cas le plus général, une équation différentielle du second ordre à deux variables x et y contient, indépendamment de ces variables, les dérivées du premier et du second ordre y' et y''. Mais nous considérerons d'abord quelques cas particuliers.

Le plus simple est celui où l'équation différentielle se présente sous la forme

$$y''=f(x).$$

En multipliant par dx et remarquant que $y''dx=dy'$, on obtient

$$dy'=f(x)\,dx,$$

et, en intégrant,

$$y'=\int f(x)\,dx+\mathrm{C}.$$

Supposons que l'intégration indiquée puisse se faire, et soit $\varphi(x)$ l'intégrale obtenue, on aura

$$y'=\varphi(x)+\mathrm{C}.$$

Multipliant de nouveau par dx, et remarquant que $y'\,dx=dy$, il viendra

$$dy=\varphi(x)\,dx+\mathrm{C}\,dx,$$

et, en intégrant,

$$y=\int\varphi(x)\,dx+\mathrm{C}x+\mathrm{C}',$$

C' désignant une nouvelle constante arbitraire. Si l'intégration indiquée dans le second membre peut s'effectuer, on obtiendra ainsi y en fonction de x. La relation obtenue par ce moyen sera l'intégrale générale cherchée. On remarque qu'elle contient deux constantes arbitraires C et C'.

Soit pour exemple l'équation différentielle

$$y'' = \cos mx,$$

on en tirera successivement

$$y' = \int \cos mx\, dx + C = \frac{\sin mx}{m} + C,$$

et

$$y = \frac{1}{m}\int \sin mx\, dx + Cx + C' = -\frac{\cos mx}{m^2} + Cx + C'.$$

241. — On traite aussi facilement le cas où l'équation différentielle se présente sous la forme

$$y'' = f(y).$$

On a, en effet,

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{y'\,dy'}{y'\,dx} = \frac{y'\,dy'}{dy};$$

on pourra donc écrire, en multipliant l'équation proposée par dy,

$$y'\,dy' = f(y)\,dy,$$

et, en intégrant,

$$\frac{y'^2}{2} = \int f(y)\,dy + C.$$

Si l'intégration indiquée peut s'effectuer, soit $\varphi(y)$ l'intégrale obtenue, on aura

$$y'^2 = 2\varphi(y) + 2C, \quad \text{d'où} \quad y' = \sqrt{2\varphi(y) + 2C}.$$

Remplaçant alors y' par $\frac{dy}{dx}$, on sépare aisément les variables et l'on obtient

$$\frac{dy}{\sqrt{2\varphi(y)+2C}}=dx,$$

et, en intégrant,

$$x=\int\frac{dy}{\sqrt{2\varphi(y)+2C}}+C';$$

et, si l'intégration indiquée peut s'effectuer, on a ainsi x en fonction de y; la relation obtenue est l'intégrale générale. On voit qu'elle renferme encore deux constantes arbitraires.

Soit, pour exemple, l'équation différentielle

$$y''=a^2y,$$

on obtiendra successivement

$$\frac{y'^2}{2}=\int a^2y\,dy+C=\frac{a^2y^2}{2}+C,$$

d'où

$$y'=\sqrt{a^2y^2+2C},$$

puis

$$dx=\frac{dy}{\sqrt{a^2y^2+2C}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{dy}{\sqrt{y^2+\frac{2C}{a^2}}},$$

et, en intégrant,

$$x=\frac{1}{2a}\log'\left(y+\sqrt{y^2+\frac{2C}{a^2}}\right)+C'.$$

242. — L'équation différentielle du second ordre à deux variables se trouve immédiatement ramenée au premier ordre quand elle ne contient aucune de ces deux variables, mais

seulement les dérivées du premier et du second ordre. Car si l'on a à intégrer l'équation

$$f(y', y'') = 0,$$

en remarquant que y'' est la dérivée première de y', on voit qu'on a affaire à une équation du premier ordre entre y' et sa dérivée. Supposons que l'intégration puisse s'effectuer, on obtiendra y' en fonction de x et d'une constante arbitraire C; soit

$$y' = \varphi(x, C),$$

l'intégrale trouvée. En multipliant par dx et intégrant de nouveau, on obtiendra

$$y = \int \varphi(x, C)\, dx + C';$$

ce sera l'intégrale générale, avec deux constantes arbitraires, de l'équation du second ordre proposée.

Soit, pour exemple, l'équation différentielle

$$y'' = a\sqrt{1 + y'^2},$$

on en tirera, en remplaçant y'' par $\frac{dy'}{dx}$, et séparant les variables,

$$adx = \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}}:$$

et, en intégrant,

$$ax + C = \log'\left(y' + \sqrt{1 + y'^2}\right),$$

relation qui revient à

$$Ae^{ax} = y' + \sqrt{1 + y'^2},$$

en remplaçant e^C par A. — On tire de là

$$y'=\frac{1}{2}\left(Ae^{ax}-\frac{1}{A}e^{-ax}\right).$$

Multipliant par dx et intégrant de nouveau, on obtient

$$y=\frac{1}{2a}\left(Ae^{ax}+\frac{1}{A}e^{-ax}\right)+C';$$

c'est l'équation intégrale cherchée.

243. — L'équation différentielle du second ordre se ramène encore au premier lorsqu'elle ne contient, avec y'' et y', que l'une des deux variables x ou y.

Supposons, par exemple, qu'elle soit de la forme

$$y''+\varphi(x).y'+\psi(x)=0.$$

En multipliant par dx, on pourra écrire

$$dy'+\varphi(x).y'dx+\psi(x)=0,$$

équation différentielle du premier ordre entre y' et x. Si on peut l'intégrer, on obtiendra une intégrale de la forme

$$y'=f(x,C);$$

multipliant de nouveau par dx et intégrant, on obtiendra

$$y=\int f(x,C)\,dx+C',$$

et, si l'intégration indiquée peut s'effectuer, on aura enfin y en fonction de x, avec deux constantes arbitraires.

Supposons, au contraire, que l'équation différentielle proposée soit de la forme

$$y''+\varphi(y)\,y'+\psi(y)=0.$$

En remplaçant y'' par $\frac{y'dy'}{dy}$, et multipliant par dy, on aura

$$y'dy' + \varphi(y)\, y'dy + \psi(y)\, dy = 0,$$

équation différentielle du premier ordre entre y' et y. Si on peut l'intégrer, on obtiendra une intégrale de la forme

$$y' = f(y) + \mathrm{C}.$$

Remplaçant y' par $\frac{dy}{dx}$, séparant les variables et intégrant, on trouvera

$$x = \int \frac{dy}{f(y) + \mathrm{C}} + \mathrm{C}',$$

et, si l'intégration indiquée peut s'effectuer, on aura enfin x en fonction de y, avec deux constantes arbitraires.

Soit, pour premier exemple, l'équation différentielle

$$y'' - \frac{y' + a}{x} = 0\,;$$

on en tirera

$$\frac{dy'}{y' + a} = \frac{dx}{x},$$

et, en intégrant,

$$\log'(y' + a) = \log' x + \log' \mathrm{C} = \log' \mathrm{C}x,$$

d'où

$$y' = \mathrm{C}x - a.$$

Multipliant par dx et intégrant de nouveau, on trouvera

$$y = \frac{1}{2}\mathrm{C}x^2 - ax + \mathrm{C}'.$$

Soit, pour second exemple, l'équation différentielle

$$y'' - y'(y + a) = 0\,;$$

on en tirera

$$\frac{y'dy'}{dy} = y'(y + a) \qquad \text{ou} \qquad dy' = (y + a)\,dy,$$

et, en intégrant une première fois,

$$y' = \frac{1}{2}y^2 + ay + C.$$

Remplaçant y' par $\frac{dy}{dx}$ et séparant les variables, il viendra

$$dx = \frac{2dy}{y^2 + 2ay + 2C},$$

et, en intégrant une seconde fois,

$$x = 2 . \int \frac{dy}{y^2 + 2ay + 2C} + C'$$

ou

$$x = \frac{2}{\sqrt{2C - a^2}} . \text{arc tang}\, \frac{y + a}{\sqrt{2C - a^2}} + C'.$$

244. — On rencontre fréquemment dans les applications un genre particulier d'équations différentielles du second ordre; ce sont celles où la fonction y et ses dérivées y' et y'' n'entrent qu'au premier degré et ne sont pas multipliées entre elles, équations auxquelles on donne, à cause de cela, le nom d'équations différentielles *linéaires*.

Le cas le plus simple est celui où tous les coefficients sont constants et où il n'y a pas de terme indépendant des variables; où, par conséquent, l'équation différentielle peut

être mise sous la forme

$$(1) \qquad y'' + py' + q = 0,$$

p et q étant des constantes données.
Dans ce cas, on pose

$$y = Ce^{mx},$$

d'où

$$y' = Cm'e^{mx} \quad \text{et} \quad y'' = Cm^2e^{mx};$$

en substituant dans (1), on obtient

$$Ce^{mx}(m^2 + mp + q) = 0,$$

et l'on voit que l'équation différentielle sera satisfaite si m est une des racines de l'équation

$$(2) \qquad m^2 + mp + q = 0.$$

Supposons d'abord que cette équation ait ses racines réelles et inégales, et désignons-les par m_1 et m_2. L'équation différentielle proposée sera satisfaite par les deux relations

$$(3) \qquad y = Ce^{m_1x} \quad \text{et} \quad y = C'e^{m_2x}.$$

Mais il est aisé de voir, et cela tient à la forme linéaire de l'équation (1), qu'on satisfera encore à cette équation en prenant pour y la somme des valeurs exprimées par les relations (3), et en posant

$$(4) \qquad y = Ce^{m_1x} + C'e^{m_2x}.$$

Or cette dernière relation sera l'intégrale générale cherchée, puisqu'elle contient deux constantes C et C'.
Si, par exemple, on a à intégrer l'équation différentielle

$$y'' - (a + b)y' + aby = 0,$$

on trouve, en suivant la marche indiquée, que l'intégrale générale est

$$y = Ce^{ax} + C'e^{bx}.$$

245. — Lorsque les racines de l'équation (2) sont égales, la méthode tombe en défaut, parce que l'équation (4) revient alors à

$$y = (C + C')\, e^{mx}$$

et ne contient plus qu'une constante arbitraire $C + C'$. On procède alors d'une autre manière. Soit

$$(5) \qquad y'' - 2py' + p^2y = 0$$

l'équation proposée; elle se trouve dans le cas que nous examinons, puisque l'équation (2) deviendrait

$$m^2 - 2pm + p^2 = 0 \quad \text{ou} \quad (m - p)^2 = 0,$$

équation qui a ses deux racines égales. On pose dans ce cas

$$(6) \qquad y = e^{mx}\,(Cx + C'),$$

d'où

$$y' = me^{mx}\,(Cx + C') + Ce^{mx}$$

et

$$y'' = m^2e^{mx}\,(Cx + C') + 2C\,me^{mx}.$$

En substituant dans l'équation (5), on obtient

$$(Cx + C')\,(m^2 - 2pm + p^2) + 2C\,(m - p) = 0,$$

et l'on voit que cette équation est satisfaite en prenant $m = p$. Ainsi l'intégrale générale est alors

$$y = e^{px}\,(Cx + C').$$

246. — Lorsque les racines de l'équation (2) sont imagi-

naires, on pourrait passer des exponentielles imaginaires aux lignes trigonométriques à l'aide des formules connues. Mais on peut poser directement

$$y = C e^{\alpha x} \cos(\beta x + C');$$

on en déduit

$$y' = C\alpha e^{\alpha x} \cos(\beta x + C') - C\beta e^{\alpha x} . \sin(\beta x + C'),$$

et

$$y'' = C\alpha^2 e^{\alpha x} \cos(\beta x + C') - 2C\alpha\beta e^{\alpha x} \sin(\beta x + C') - C\beta^2 e^{\alpha x} \cos(\beta x + C').$$

En substituant dans l'équation (1), on obtient, après avoir divisé par $C e^{\alpha x}$,

$$(\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q) \cos(\beta x + C') - \beta(2\alpha + p) \sin(\beta x + C') = 0,$$

et l'on voit que l'équation est satisfaite en posant

$$\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q = 0 \quad \text{et} \quad 2\alpha + p = 0,$$

d'où

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

La valeur de β ainsi trouvée est réelle, puisque, les racines de l'équation (2) étant supposées imaginaires, on a

$$\frac{p^2}{4} - q < 0, \quad \text{ou} \quad q - \frac{p^2}{4} > 0.$$

247. — Si, dans l'équation (1) du n° 244, le second membre, au lieu d'être nul, avait une valeur donnée, et qu'on eût

$$y'' + py' + qy = r,$$

on ramènerait ce cas au précédent en posant $y = u + \frac{r}{q}$; car, en substituant cette valeur, il vient

$$u'' + pu' + qu = 0.$$

248. — Lorsque les coefficients de l'équation linéaire du second ordre sont fonctions de la variable x, l'intégration ne peut s'effectuer que dans des cas particuliers. On pose alors

$$y = e^u, \quad \text{d'où} \quad y' = e^u . u' \quad \text{et} \quad y'' = e^u u'' + e^u u',$$

et, en substituant dans l'équation (1) et supprimant le facteur e^u,

$$u'' + (1 + p) u' + q = 0,$$

ou

$$du' + (1 + p) u' . dx + q dx = 0,$$

équation différentielle du premier ordre entre u' et x. Si elle peut s'intégrer par quelqu'une des méthodes exposées plus haut et que son intégrale soit

$$u' = f(x) + C,$$

on en tirera

$$u = \int f(x)\, dx + Cx + C',$$

et l'on aura, par suite, la valeur de y. Ce sera l'intégrale générale, puisqu'elle contient deux constantes arbitraires C et C'.

249. — Enfin si, par un moyen quelconque, on a réussi à trouver une intégrale particulière de l'équation différentielle proposée, la recherche de l'intégrale générale pourra être ramenée à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables.

Soit, en effet,

$$(a) \qquad y'' + py' + qy = 0$$

l'équation différentielle proposée, et soit Y une intégrale particulière de cette équation, c'est-à-dire une fonction de x qui, mise à la place de y dans (a), satisfasse à cette relation. On posera $y = Yu$, u désignant une nouvelle fonction de x. On en déduit

$$y' = Y'u + Yu' \quad \text{et} \quad y'' = Y''u + 2Y'u' + Yu'',$$

et, en substituant dans (a), on obtient

$$Yu'' + (2Y' + pY)u' + (Y'' + pY' + qY) = 0.$$

Or la dernière parenthèse est nulle puisque, par hypothèse, la fonction Y satisfait à l'équation (a) ; il reste donc

$$(b) \qquad Yu'' + (2Y' + pY)u' = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{du'}{u'} + \frac{(2Y' + pY)\,dx}{Y} = 0,$$

équation différentielle du premier ordre entre u' et x ; les variables s'y trouvent immédiatement séparées.

Si

$$u' = f(x) + C$$

est l'intégrale de cette équation, on en tirera, comme plus haut,

$$u = \int f(x)\,dx + Cx + C',$$

et, par conséquent, la relation

$$y = Y\left[\int f(x)\,dx + Cx + C'\right],$$

qui sera l'intégrale générale.

La même méthode s'appliquerait encore si le second membre de l'équation (a), au lieu d'être nul, était une fonction de x; mais l'équation du premier ordre entre u' et x serait moins simple.

§ 4. — DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES

250. — Considérons d'abord deux équations différentielles simultanées du premier ordre entre trois variables x, y et t, dont les deux premières sont fonctions de la troisième. Ces équations seront de la forme

$$(1)\quad \varphi\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, x, y, t\right)=0, \quad \text{et} \quad \psi\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, x, y, t\right)=0;$$

et il s'agit d'en déduire x et y en fonction de t. Pour cela, la méthode générale consiste à différentier les deux équations (1) par rapport à t. On obtient ainsi deux équations de plus, qui contiennent, outre les quantités contenues dans les relations (1), les dérivées du second ordre $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$. Si, entre ces quatre équations, on élimine les trois quantités $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{dy}{dt}$ et y, il restera une équation ne contenant que $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}$ et x. Ce sera donc une équation différentielle du second ordre, entre x et t. Supposons qu'on puisse l'intégrer, on obtiendra une intégrale générale de la forme

$$(2)\qquad x=f(t, C, C'),$$

contenant deux constantes arbitraires C et C'. On en tirera $\frac{dx}{dt}$; et, en substituant dans l'une des équations (1) pour x et pour $\frac{dx}{dt}$ leurs valeurs en fonction de t, on aura une équation

différentielle du premier ordre, entre y et t. Si elle peut s'intégrer, on obtiendra une intégrale générale de la forme

$$(3) \qquad y = F(t, C''),$$

contenant une nouvelle constante arbitraire. Les relations (2) et (3) seront les équations intégrales du problème.

251. — Cette méthode est rarement applicable dans toute sa généralité; mais il arrive souvent que les équations simultanées sont linéaires par rapport aux variables x et y et à leurs dérivées, et sont de plus à coefficients constants. En éliminant alternativement entre elles les dérivées $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$, on obtient deux équations différentielles simultanées, équivalentes aux premières, linéaires comme elles, et de la forme

$$(4) \qquad \frac{dx}{dt} + ax + by = C, \quad \frac{dy}{dt} + a'x + b'y = C'.$$

On fait disparaître les seconds membres en posant

$$x = u + h, \quad y = v + k,$$

et déterminant h et k par les relations

$$ah + bk = C, \quad a'h + b'k = C.$$

Il reste alors deux équations de la forme

$$(5) \qquad \frac{du}{dt} + au + bv = 0, \quad \frac{dv}{dt} + a'u + b'v = 0.$$

Tirons v de la première, nous aurons

$$(6) \quad v = -\frac{1}{b} \cdot \frac{du}{dt} - \frac{a}{b} u, \quad \text{d'où} \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{b} \cdot \frac{d^2u}{dt^2} - \frac{a}{b} \cdot \frac{du}{dt}.$$

Portant ces valeurs dans la seconde équation (5), ordon-

nant et chassant le dénominateur b, on obtient

$$(7) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} + (a+b')\frac{du}{dt} + (ab' - a'b)\,u = 0,$$

équation linéaire du second ordre entre u et t, sans second membre et à coefficients constants. Elle pourra donc s'intégrer par la méthode des nos 244 et suivants; et l'on obtiendra une intégrale générale de la forme

$$u = f(t, C, C'),$$

avec deux constantes arbitraires. On en déduira $\frac{du}{dt}$ en fonction de t; et, en substituant pour u et $\frac{du}{dt}$ leurs valeurs dans la première des équations (6), on aura la valeur correspondante de v. On en déduira immédiatement les valeurs de x et de y.

Prenons pour exemple les deux équations simultanées

$$(8) \qquad \frac{dx}{dt} + x - 4y = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} + 3x - 6y = 6,$$

qui ont la forme des équations (4).

Les équations qui donnent h et k seront ici

$$h - 4k = 1 \quad \text{et} \quad 3h - 6k = 6,$$

qui donnent

$$h = 3 \quad \text{et} \quad k = \frac{1}{2}.$$

On posera donc

$$(9) \qquad x = u + 3 \quad \text{et} \quad y = v + \frac{1}{2}$$

et l'on aura les équations sans second membre

$$(10) \qquad \frac{du}{dt} + u - 4v = 0, \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dt} + 3u - 6v = 0.$$

En suivant la marche indiquée, on aura à intégrer l'équation du second ordre

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 5\frac{du}{dt} + 6u = 0,$$

dont l'intégrale générale (244) est

$$u = Ce^{2t} + C'e^{3t}.$$

On en tire

$$\frac{du}{dt} = 2Ce^{2t} + 3C'e^{3t},$$

et, en substituant dans la première des équations (10), on trouve

$$v = \frac{1}{4}[2Ce^{2t} + 3C'e^{3t} + Ce^{2t} + C'e^{3t}] = \frac{3}{4}Ce^{2t} + C'e^{3t}.$$

Par suite

$$x = Ce^{2t} + C'e^{3t} + 3 \quad \text{et} \quad y = \frac{3}{4}Ce^{2t} + C'e^{3t} + \frac{1}{2}.$$

252. — Nous supposerons maintenant que l'on ait à intégrer un système de trois équations simultanées du premier ordre entre les variables x, y, z, t, dont les trois premières sont fonction de la quatrième ; on conçoit que l'on pourrait suivre une marche analogue à celle du n° 250. On différentierait deux fois par rapport à t chacune des équations proposées ; on aurait ainsi neuf équations, entre lesquelles on pourrait éliminer les huit quantités $\frac{d^3y}{dt^3}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{dy}{dt}, y, \frac{d^3z}{dt^3}, \frac{d^2z}{dt^2}, \frac{dz}{dt}, z$; il resterait une équation différentielle entre x et t, mais elle serait du troisième ordre. Une fois cette équation intégrée, on mettrait pour x sa valeur en t dans deux des équations proposées, et la question serait ramenée à l'intégration d'un système de deux

équations simultanées et du premier ordre entre y, z et t. Mais cette méthode, purement théorique, n'est jamais employée.

Nous considérerons sur-le-champ le cas le plus simple, et qui se rencontre dans les applications, celui où les équations proposées sont linéaires et à coefficients constants; par une transformation analogue à celle du numéro précédent, on peut toujours les ramener à avoir *zéro* pour second membre. Elles sont alors de la forme

$$\text{(11)}\qquad \begin{aligned} &\frac{dx}{dt}+ax+by+cz=0,\\ &\frac{dy}{dt}+a'x+b'y+c'z=0,\\ &\frac{dz}{dt}+a''x+b''y+c''z=0. \end{aligned}$$

Il existe plusieurs méthodes pour intégrer les équations de ce genre. Nous nous contenterons de faire connaître la suivante, qui pourrait aussi être employée dans le cas de deux variables.

On pose

$$x=Ce^{mt},\quad y=\lambda Ce^{mt},\quad z=\mu Ce^{mt},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx}{dt}=mCe^{mt},\quad \frac{dy}{dt}=m\lambda Ce^{mt},\quad \frac{dz}{dt}=m\mu Ce^{mt}.$$

On substitue ces valeurs dans les équations proposées; et, après avoir divisé par Ce^{mt}, il reste

$$\text{(12)}\qquad \begin{aligned} &m+a+\lambda b+\mu c=0,\\ &m\lambda+a'+\lambda b'+\mu c'=0,\\ &m\mu+a''+\lambda b''+\mu c''=0. \end{aligned}$$

Si l'on élimine λ et μ entre ces trois équations, on obtient une équation du troisième degré en m. Soient m_1, m_2 et m_3, ses trois racines ; et soient C_1, C_2, C_3, trois valeurs arbitraires de C, correspondantes à ces trois racines. A cause de la forme linéaire des équations (11), on reconnaît qu'elles seront satisfaites par le système de valeurs :

$$
(13) \qquad \begin{aligned}
x &= Ce^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} + C_3 e^{m_3 t}, \\
y &= \lambda_1 C_1 e^{m_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{m_2 t} + \lambda_3 C_3 e^{m_3 t}, \\
z &= \mu_1 C_1 e^{m_1 t} + \mu_2 C_2 e^{m_2 t} + \mu_3 C_3 e^{m_3 t}.
\end{aligned}
$$

les lettres λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 représentant les valeurs de λ et de μ qui correspondent respectivement aux trois racines de l'équation en m. Les équations (13) seront les intégrales générales du système d'équations différentielles proposées.

253. — Quant aux équations simultanées d'ordre supérieur au premier, elles donnent lieu à des calculs de plus en plus compliqués à mesure qu'elles sont d'un ordre plus élevé, et elles ne peuvent être intégrées que dans des cas tout à fait particuliers.

Pour ne parler que du cas d'un système de trois équations différentielles entre trois variables x, y et t, si l'une était du deuxième ordre et la seconde du premier, on pourrait différentier la première une fois par rapport à t, et la seconde deux fois; on obtiendrait ainsi cinq équations, entre lesquelles on pourrait éliminer les quatre quantités $\frac{d^3y}{dt^3}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{dy}{dt}$, y, et il resterait une équation entre x et t ; mais elle serait du troisième ordre.

Si les équations proposées étaient toutes deux du second ordre, on pourrait différentier deux fois chacune d'elles par rapport à t ; on aurait ainsi six équations, entre lesquelles on éliminerait les cinq quantités $\frac{d^4y}{dt^4}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{dy}{dt}$ et y; il res-

terait une équation différentielle entre x et t, mais elle serait du quatrième ordre.

Nous renverrons, pour de plus amples détails sur ce sujet, aux traités plus étendus, le cas d'un système d'équations différentielles simultanées d'ordre supérieur au premier ne se présentant pas dans les applications usuelles.

§ 8. — DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES TOTALES

254. — Nous nous bornerons au premier ordre et au cas de trois variables x, y, z, dont la dernière est fonction des deux autres. Le problème à résoudre est d'abord celui-ci : étant donnée une différentielle exacte de la forme

$$(1) \qquad dz = \varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy,$$

en déduire la valeur de z en fonction des variables x et y. Pour que cette équation soit intégrable, il faut qu'elle remplisse une condition. Les fonctions $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ doivent être les dérivées partielles de z par rapport à x et à y pour que le second membre de (1) soit une différentielle exacte. Or, on sait (55) que l'on doit avoir, en général,

$$\frac{d^2 z}{dx\, dy} = \frac{d^2 z}{dy\, dx}.$$

Dans le cas actuel, cette relation devient

$$(2) \qquad \frac{d\varphi(x, y)}{dy} = \frac{d\psi(x, y)}{dx};$$

c'est la *condition d'intégrabilité* que l'équation différentielle proposée doit remplir. Si on la suppose satisfaite, on a d'abord

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x, y), \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2 z}{dx\, dy} = \frac{d\varphi(x, y)}{dy};$$

on en tire

$$dz = \varphi(x, y)\, dx,$$

et, en intégrant par rapport à x, on obtiendra z ; mais il faut bien remarquer qu'il ne suffira plus ici d'ajouter au second membre une constante arbitraire ; car, dans la différentiation de z par rapport à x, une fonction de y seul peut avoir disparu ; ce qu'il faut ajouter au second membre après l'intégration, c'est donc une fonction inconnue de y. Si l'on représente par $\Phi(x, y)$ l'intégrale de $\varphi(x, y)\, dx$ par rapport à x, on devra donc écrire

$$(3) \qquad z = \Phi(x,y) + f(y) + C,$$

f désignant la fonction inconnue et C une constante arbitraire.

Si maintenant on différentie par rapport à y, on aura

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d.\Phi(x,y)}{dy} + f'(y).$$

Cette valeur devant être égale à $\psi(x, y)$, on a

$$(4) \quad \frac{d.\Phi(x,y)}{dy} + f'(y) = \psi(x,y), \text{ d'où } f'(y) = \psi(x,y) - \frac{d.\Phi(x,y)}{dy}.$$

Cette relation fait connaître $f'(y)$; et, en intégrant par rapport à y, on aura $f(y)$. Par suite, l'équation (3) donnera z.

Soit, par exemple, l'équation

$$dz = (2axy^2 + by + 2cx)\, dx + (2ax^2y + bx + 2cy)\, dy.$$

On aura d'abord

$$\frac{dz}{dx} = 2axy^2 + by + 2cx,$$

et

$$\frac{dz}{dy} = 2ax^2y + bx + 2ey.$$

Multipliant la première de ces relations par dx, et intégrant par rapport à x, on trouvera

$$z = ax^2y^2 - bxy + cx^2 + f(y).$$

Par suite,

$$\frac{dz}{dy} = 2ax^2y + bx + f'(y).$$

En comparant cette valeur à celle qui est écrite plus haut, on en conclut

$$f'(y) = 2ey, \quad \text{d'où} \quad f(y) = ey^2 + C.$$

Par suite,

$$z = ax^2y^2 + bxy + cx^2 + ey^2 + C.$$

235. — Soit maintenant l'équation plus générale

$$(5) \qquad Mdx + Ndy + Pdz = 0,$$

dans laquelle M, N et P sont des fonctions des trois variables x, y et z. Si le premier membre est la différentielle exacte d'une fonction u des trois variables x, y, z, tout se réduit à trouver cette fonction, car alors l'intégrale demandée sera

$$u = \text{const.}$$

Or, si le premier membre de l'équation (5) est une différentielle exacte, l'ensemble des deux premiers termes, ou $Mdx + Ndy$, doit aussi être une différentielle exacte quand on y regarde z comme constant. Soit dv cette différentielle, et supposons que nous ayons intégré l'équation

$$dv = Mdx + Ndy,$$

par la méthode indiquée au numéro précédent, nous aurons $v = \varphi(x, y, z)$. Or la fonction u ne peut différer de v que par une fonction de z, puisque, en regardant z comme constant, du s'est réduit à dv. On peut donc écrire

$$u = \varphi(x, y, z) + f(z).$$

On en déduit

$$\frac{du}{dz} = \frac{d\varphi(x, y, z)}{dz} + f'(z).$$

Cette valeur doit coïncider avec P ; on doit donc avoir

$$P = \frac{d \cdot \varphi(x, y, z)}{dz} + f'(z),$$

d'où

$$'(z) = P - \frac{d \cdot \varphi(x, y, z)}{dz},$$

et, en intégrant par rapport à z,

$$f(z) = \int \left[P - \frac{d \cdot \varphi(x, y, z)}{dz} \right] dz.$$

Dès lors l'intégrale cherchée sera

$$\varphi(x, y, z) + f(z) = \text{const.}$$

Prenons pour exemple l'équation différentielle

$$(ayz + bz + ky)\, dx + (axz + cz + kx)\, dy + (axy + bx + cy + 2ez)\, dz = 0.$$

Or on aura ici

$$dv = (ayz + bz + ky)\, dx + (axz + cz + kx)\, dy;$$

et si l'on intègre cette équation en regardant z comme con-

tant, la méthode du n° 254 donnera

$$v=(az+k)\,xy+bzx+czy+\text{const.}\;;$$

par suite

$$u=(az+k)\,xy+bzx+czy+\text{const.}+f(z).$$

On en tire

$$\frac{du}{dz}=axy+bx+cy+f'(z)\,;$$

et, en comparant avec le coefficient de dz dans l'équation différentielle proposée, on en déduit

$$f'(z)=2ez,\quad \text{d'où}\quad f(z)=ez^2+C.$$

Par conséquent, l'équation intégrale cherchée est

$$axyz+bxz+cyz+kxy+ez^2=\text{constante}.$$

Nous renverrons aux traités plus étendus pour le cas où l'équation différentielle proposée ne satisfait pas à la condition d'intégralité.

§ 6. — DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES

256. — L'intégration des équations aux différences partielles forme un sujet très-étendu que nous n'avons pas l'intention de développer ici. Nous nous bornerons à traiter des équations aux différences partielles du premier ordre et à donner comme exemple du second ordre les équations différentielles les plus simples que l'on rencontre dans les questions de Géométrie ou de Physique mathématique.

Considérons d'abord l'équation différentielle

$$\text{(1)}\qquad X\frac{dz}{dx}+Y\frac{dz}{dy}=Z,$$

dans laquelle X, Y, Z représentent des fonctions quelconques des trois variables x, y, z.

Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'intégrale de cette équation différentielle.

En la différentiant, soit par rapport à x, soit par rapport à y, on obtient les deux relations

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0.$$

Si l'on en tire les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et de $\frac{dz}{dy}$ pour les substituer dans l'équation (1), et qu'on chasse le dénominateur introduit, on pourra la mettre sous la forme

$$(2) \qquad \mathrm{X}\frac{df}{dx} + \mathrm{Y}\frac{df}{dy} + \mathrm{Z}\frac{df}{dz} = 0,$$

et si l'on pouvait tirer de celle-ci la valeur de f en x, y et z, le problème serait résolu.

Pour y parvenir, on considère les équations

$$(3) \qquad \frac{dx}{\mathrm{X}} = \frac{dy}{\mathrm{Y}} = \frac{dz}{\mathrm{Z}},$$

qui forment un système de deux équations différentielles simultanées et du premier ordre. Concevons qu'on les ait intégrées, et soient

$$f_1(x, y, z) = \mathrm{C}_1 \quad \text{et} \quad f_2(x, y, z) = \mathrm{C}_2$$

les intégrales obtenues. On en déduit par la différentiation

$$\frac{df_1}{dx}dx + \frac{df_1}{dy}dy + \frac{df_1}{dz}dz = 0,$$

et

$$\frac{df_2}{dx}dx + \frac{df_2}{dy}dy + \frac{df_2}{dz}dz = 0,$$

ou, en ayant égard aux relations (3),

$$(4)\ X\frac{df_1}{dx} + Y\frac{df_1}{dy} + Z\frac{df_1}{dz} = 0, \text{ et } X\frac{df_2}{dx} + Y\frac{df_2}{dy} + Z\frac{df_2}{dz} = 0.$$

Ces dernières expriment que les fonctions f_1 et f_2 satisfont toutes deux à l'équation (2) et sont par conséquent des intégrales particulières de l'équation (1).

Or, on peut démontrer qu'une fonction arbitraire de f_1 et de f_2 satisfait également à l'équation (1). En effet, désignons par φ cette fonction arbitraire. Multipliant la première des équations (4) par $\frac{d\varphi}{df_1}$, et la seconde par $\frac{d\varphi}{df_2}$, puis ajoutons-les terme à terme, il viendra

$$X\left(\frac{d\varphi}{df_1}\cdot\frac{df_1}{dx}dx + \frac{d\varphi}{df_2}\cdot\frac{df_2}{dx}dx\right) + Y\left(\frac{d\varphi}{df_1}\cdot\frac{df_1}{dy}dy + \frac{d\varphi}{df_2}\cdot\frac{df_2}{dy}dy\right)$$
$$+ Z\left(\frac{d\varphi}{df_1}\cdot\frac{df_1}{dz}dz + \frac{d\varphi}{df_2}\cdot\frac{df_2}{dz}dz\right) = 0,$$

ou, ce qui revient au même, puisque φ est une fonction de f_1 et de f_2 (27, 23),

$$X\frac{d\varphi}{dx} + Y\frac{d\varphi}{dy} + Z\frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

c'est-à-dire que la fonction φ satisfait à l'équation (2) et que, par conséquent, l'intégrale générale de l'équation (1) est

$$\varphi(f_1, f_2) = 0.$$

On la met souvent sous la forme

$$f_1 = \psi(f_2),$$

ψ représentant également une fonction arbitraire. Il est clair, en effet, que ces deux formes sont équivalentes.

257. — I. Prenons, pour premier exemple, l'équation aux différences partielles

$$\frac{dz}{dx} = a\frac{dz}{dy} \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{dx} - a\frac{dz}{dy} = 0.$$

On a ici

$$X = 1, \quad Y = -a, \quad Z = 0.$$

Par conséquent les équations (3) deviennent

$$dx + \frac{dy}{a} = 0 \quad \text{et} \quad dz = 0,$$

qui ont pour intégrales

$$y + ax = C_1 \quad \text{et} \quad z = C_2.$$

Par suite, l'intégrale générale de l'équation proposée est

$$z = \psi(y + ax);$$

on a, en effet,

$$\frac{dz}{dx} = a\psi'(y + ax) \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dy} = \psi'(y + ax),$$

valeurs qui satisfont à l'équation proposée.

II. Soit, pour second exemple, l'équation

$$A\frac{dz}{dx} + B\frac{dz}{dy} = C,$$

dans laquelle A, B, C sont des constantes données. On a ici

$$X = A, \quad Y = B, \quad Z = C.$$

Les équations (3) deviennent

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} \quad \text{et} \quad \frac{dx}{A} = \frac{dz}{C};$$

elles ont pour intégrales

$$Ay - Bx = \text{const.} \quad \text{et} \quad Az - Cx = \text{const.}$$

Par conséquent, l'intégrale générale de l'équation proposée est

$$Az - Cx = \psi(Ay - Bx),$$

ψ désignant une fonction arbitraire.

III. Soit encore l'équation

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = z.$$

On a ici

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z.$$

On peut prendre pour les équations (3) les relations

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

qui donnent

$$\log' x - \log' z = \text{const.} \quad \text{et} \quad \log' y - \log' z = \text{const.},$$

d'où

$$\frac{x}{z} = \text{const.} \quad \text{et} \quad \frac{y}{z} = \text{const.}$$

L'intégrale générale de l'équation proposée est donc

$$\frac{x}{z} = \psi\left(\frac{y}{z}\right),$$

ψ désignant toujours une fonction arbitraire.

258. — I. Considérons maintenant l'équation aux différences partielles du second ordre

$$(1) \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = a^2\frac{d^2z}{dy^2}.$$

On y satisfait de la manière la plus générale en posant

$$(2) \qquad z = \varphi(y - ax) + \psi(y + ax),$$

φ et ψ désignant des fonctions arbitraires. Car on en tire successivement :

$$\frac{dz}{dx} = - a\varphi'(y - ax) + a\psi'(y + ax),$$
$$\frac{dz}{dy} = \varphi'(y - ax) + \psi'(y + ax),$$
$$\frac{d^2 z}{dx^2} = + a^2\varphi''(y - ax) + a^2\psi''(y + ax),$$
$$\frac{d^2 z}{dy^2} = \varphi''(y - ax) + \psi''(y + ax),$$

et l'équation proposée est évidemment satisfaite par ces deux dernières valeurs.

II. Considérons de même l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = c;$$

on y satisfait de la manière la plus générale en posant

$$z = \varphi(x) + \psi(y) + cxy.$$

III. Soit encore l'équation

$$A^2\frac{d^2 z}{dx^2} - 2AB.\frac{d^2 z}{dx\,dy} + B^2\frac{d^2 z}{dy^2} = 0;$$

on y satisfait de la manière la plus générale en posant

$$z = \varphi(Ay + Bx) + x\psi(Ay + Bx);$$

car on en tire

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 z}{dx^2} &= B^2 \varphi'' + 2B\psi' + B^2 x \psi'',\\
\frac{d^2 z}{dx\,dy} &= AB\varphi'' + A\psi' + ABx\psi'',\\
\frac{d^2 z}{dy^2} &= A^2\varphi'' + A^2 x \psi'',
\end{aligned}$$

et ces valeurs substituées dans la proposée rendent le premier membre identiquement nul.

IV. Soit enfin l'équation

$$x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + 2xy\frac{d^2 z}{dx\,dy} + y^2 \frac{d^2 z}{dy^2} = 0\,;$$

on y satisfait de la manière la plus générale en posant

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right);$$

car on en tire

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 z}{dx^2} &= \frac{y^2}{x^4}\varphi'' + \frac{2y}{x^3}\varphi' + \frac{y^2}{x^3}\psi'',\\
\frac{d^2 z}{dx\,dy} &= -\frac{1}{x^2}\varphi' - \frac{y}{x^3}\varphi'' - \frac{y}{x^2}\psi'',\\
\frac{d^2 z}{dy^2} &= \frac{1}{x^2}\varphi'' + \frac{1}{x}\psi'',
\end{aligned}$$

et, en substituant ces valeurs dans la proposée, on reconnaît qu'elle est satisfaite.

Il suffira de ces exemples pour donner une idée du rôle que jouent les fonctions arbitraires dans l'intégration des équations aux différences partielles. Pour la théorie même de cette intégration, quand l'équation dépasse le premier ordre, nous renverrons aux traités plus étendus.

§ 7. — APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

259. — I. *Trouver la courbe dont la sous-normale est constante.* L'expression de la sous-normale étant yy', l'équation du problème est

$$yy' = p,$$

en désignant par p la constante. Cette équation revient à

$$y\,dy = p\,dx,$$

équation différentielle du premier ordre et du premier degré à deux variables. En l'intégrant, puisque les variables y sont séparées (230), on obtient

$$\frac{y^2}{2} = px + C \quad \text{ou} \quad y^2 = 2px + 2C,$$

équation d'une parabole qui a pour axe de figure l'axe des x.

II. *Trouver la courbe dont la sous-tangente est proportionnelle à l'abscisse.* L'équation du problème est

$$\frac{y}{y'} = mx,$$

m désignant une constante. On sépare aisément les variables et l'on obtient

$$m\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

et, en intégrant,

$$m \log' y = \log' x + \log' C = \log' Cx,$$

attendu que l'on peut représenter la constante par $\log' C$,

et enfin

$$y^m = Cx.$$

C'est une parabole du degré m.

Si la sous-tangente est double de l'abscisse, on a $m=2$, et la courbe cherchée a pour équation

$$y^2 = Cx.$$

C'est la parabole ordinaire.

III. *Trouver la courbe dont la sous-normale est proportionnelle à l'abscisse.* L'équation du problème est

$$yy' = mx$$

ou

$$y\,dy = mx\,dx.$$

En intégrant, on obtient

$$y^2 = mx^2 + C,$$

équation d'une hyperbole ou d'une ellipse, suivant que m est positif ou négatif.

260. — IV. *Trouver la courbe dont la normale est constante.* L'équation du problème est

$$y\sqrt{1+y'^2} = a,$$

a désignant une constante. C'est une équation différentielle du premier ordre, mais du second degré. On en tire

$$y' = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y},$$

le radical portant avec lui son double signe. On peut mettre

cette équation sous la forme

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=dx.$$

En intégrant, on obtient

$$-\sqrt{a^2-y^2}=x+C$$

ou

$$y^2+(x+c)^2=a^2,$$

équation d'un cercle qui a pour rayon a et son centre sur l'axe des x.

V. *Trouver la courbe dont la tangente est constante.* L'équation du problème est

$$y\sqrt{1+\frac{1}{y'^2}}=a,$$

d'où

$$y'=\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}},$$

ou, en séparant les variables,

$$dx=\frac{dy\sqrt{a^2-y^2}}{y}.$$

Pour effectuer l'intégration du second membre, il est commode de poser

$$y=a\sin\omega,\quad \text{d'où}\quad dy=a\cos\omega\,d\omega,$$

et, par suite,

$$dx=a^2\left(\frac{1}{\sin\omega}-\sin\omega\right)d\omega$$

et

$$x + C = a^2\left[\log' \operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega + \cos\omega\right].$$

Remplaçant ensuite ω en fonction de y, on trouvera, toutes réductions faites,

$$x + C = a^2 \log' . \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a + \sqrt{a^2 - y^2}}} + a\sqrt{a^2 - y^2}.$$

La courbe représentée par cette équation porte le nom de *tractrice*.

VI. *Trouver la courbe dans laquelle la longueur de l'arc est proportionnelle au carré de l'abscisse.*

En désignant par s l'arc de la courbe, on peut écrire l'équation du problème sous la forme

$$s = \frac{x^2}{2k},$$

d'où

$$ds = \frac{x\,dx}{k} \quad \text{ou} \quad dx\sqrt{1 + y'^2} = \frac{x\,dx}{k}.$$

On en tire

$$y' = \sqrt{\frac{x^2}{k^2} - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - k^2}}{k},$$

puis

$$dy = \frac{1}{k}\,dx\sqrt{x^2 - k^2}$$

et, en intégrant (177),

$$y + C = \frac{1}{2k}\left[-k^2 \log'\left(x + \sqrt{x^2 - k^2}\right) + x\sqrt{x^2 - k^2}\right].$$

261. — VII. *Trouver la courbe dont le rayon de courbure*

est constant. L'équation du problème est

$$-\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=a,$$

équation différentielle du second ordre.

En multipliant par y', et remplaçant cette dérivée par $\frac{y'\,dy'}{dy}$, on a d'abord

$$-(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}=a\frac{y'\,dy'}{dy},$$

d'où

$$\frac{dy}{a}=-\frac{y'\,dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et, en intégrant, on trouve

$$\frac{y+c}{a}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

On tire de cette équation

$$y'=\frac{\sqrt{a^2-(y+c)^2}}{y+c} \quad \text{ou} \quad \frac{dy\,(y+c)}{\sqrt{a^2-(y+c)^2}}=dx$$

et, en intégrant de nouveau, on obtient

$$-\sqrt{a^2-(y+c)^2}=x+c' \quad \text{ou} \quad (x+c')^2+(y+c)^2=a,$$

équation d'un cercle de rayon a.

VIII. *Trouver la courbe dont le rayon de courbure est double de la normale.* L'équation du problème est

$$-\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=2y\sqrt{1+y'^2}.$$

Cette équation se simplifie quand on supprime le facteur

$\sqrt{1+y'^2}$; et il reste

$$-\frac{1+y'^2}{y''}=2y.$$

Multipliant par y'', et remplaçant ensuite cette dérivée par $\frac{y'\,dy'}{dy}$, il vient

$$-(1+y'^2)=\frac{2y\,y'\,dy'}{dy} \quad \text{ou} \quad -\frac{dy}{y}=\frac{2y'\,dy'}{1+y'^2}.$$

En intégrant, on obtient

$$y\sqrt{1+y'^2}=C, \quad \text{d'où} \quad y'=\sqrt{\frac{C-y}{y}},$$

ou

$$dx=dy\sqrt{\frac{y}{C-y}}.$$

Sous cette forme, on reconnaît aisément l'équation différentielle de la cycloïde. Si l'on pose, en effet,

$$x=\frac{1}{2}C(\alpha-\sin\alpha) \quad \text{et} \quad y=\frac{1}{2}C(1-\cos\alpha),$$

on reconnaît que l'équation différentielle est satisfaite.

IX. *Trouver la courbe dans laquelle la longueur de l'arc est proportionnelle au coefficient angulaire de la tangente.* L'équation du problème est

$$s=ay'.$$

Il faut d'abord la différentier, afin de pouvoir remplacer l'arc, ou du moins son élément, en fonction du coefficient angulaire de la tangente. On trouve ainsi

$$ds=dx\sqrt{1+y'^2}=a\,dy',$$

d'où

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

et, en intégrant,

$$\frac{x+C}{a} = \log'\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right).$$

En passant aux nombres, on peut écrire

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{\frac{x+C}{a}}.$$

On tire de cette relation

$$y' = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{x+C}{a}} - e^{-\frac{(x+C)}{a}}\right],$$

ou

$$dy = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{x+C}{a}} - e^{-\frac{(x+C)}{a}}\right]dx.$$

En intégrant de nouveau, il vient enfin

$$y + C' = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{x+C}{a}} + e^{-\frac{(x+C)}{a}}\right].$$

En transportant les axes parallèlement à eux-mêmes, et mettant l'origine au point qui a pour coordonnées $x = -C$ et $y = -C'$, on met cette équation sous la forme plus simple

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

La courbe qui est représentée par cette équation porte le nom de *chaînette*.

262. — X. *Trouver l'équation générale des surfaces dont l'équation différentielle est*

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1.$$

Cette équation est une équation aux différences partielles du premier ordre ; on aura donc à appliquer la méthode développée au n° 256. Les équations à deux variables qu'il faut d'abord intégrer sont ici

$$\frac{dx}{a} = dz \quad \text{et} \quad \frac{dy}{b} = dz,$$

qui donnent

$$z - ax = C_1 \quad \text{et} \quad z - by = C_2.$$

L'équation intégrale demandée est donc

$$\varphi(z - ax, z - by) = 0 \quad \text{ou} \quad z - ax = \psi(z - by),$$

les caractéristiques φ et ψ représentant des fonctions arbitraires. Cette équation est l'équation générale des cylindriques (153).

XI. *Trouver l'équation générale des surfaces dont l'équation différentielle est*

$$z = x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy}.$$

Les équations à intégrer sont ici :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

qui donnent

$$\frac{x}{z} = C_1 \quad \text{et} \quad \frac{y}{z} = C_2.$$

L'équation demandée est donc

$$\frac{x}{z} = \varphi\left(\frac{y}{z}\right),$$

φ désignant une fonction arbitraire. Cette équation est l'équation générale des surfaces coniques dont le sommet est à l'origine.

XII. *Trouver l'équation générale des surfaces dont l'équation différentielle est*

$$y\frac{dz}{dx} - x\frac{dz}{dy} = 0.$$

Les équations simultanées à intégrer sont ici

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0};$$

elles reviennent à

$$x\,dx + y\,dy = 0 \quad \text{et} \quad dz = 0$$

et donnent

$$x^2 + y^2 = C_1 \quad \text{et} \quad z = C_2.$$

Par conséquent, l'équation cherchée est

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

φ désignant une fonction arbitraire. C'est l'équation générale des surfaces de révolution qui ont pour axe l'axe des z.

263. — Pour terminer ces applications géométriques, nous traiterons encore le problème connu sous le nom de *Problème des trajectoires*. Voici en quoi il consiste : étant donnée une famille de courbes dont l'équation est

$$(1) \qquad f(x, y, \alpha) = 0,$$

trouver un courbe qui rencontre celles-ci sous un même angle donné V. (Cette courbe prend le nom de *trajectoire ;* si l'angle V est droit, c'est une *trajectoire orthogonale*.)

Le coefficient de la tangente à l'une des courbes données, au point dont les cordonnées sont x et y, a pour expression

$$y' = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}.$$

Le coefficient angulaire de la tangente à la trajectoire qui passe au même point x, y est d'ailleurs $\frac{dy}{dx}$. On doit donc avoir, d'après la condition du problème,

$$\operatorname{tang} V = \frac{\frac{dy}{dx} - y'}{1 + y' \frac{dy}{dx}}$$

ou, en mettant pour y' sa valeur ci-dessus, et multipliant les deux termes de la fraction par $\frac{df}{dx}$,

$$(2) \qquad \operatorname{tang} V = \frac{\frac{dy}{dx} \cdot \frac{df}{dy} + \frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{df}{dx}},$$

Si l'on élimine le paramètre α entre cette dernière relation et l'équation (1), on obtient une relation en x et y, qui est l'équation différentielle de la trajectoire. Cette équation différentielle est toujours du premier ordre; en l'intégrant, on obtient l'équation générale des trajectoires cherchées, puisque l'intégration introduit une constante arbitraire.

Lorsqu'il s'agit des trajectoires orthogonales, on a

$$\operatorname{tang} V = \infty,$$

et la relation (2) est remplacée par

$$(3) \qquad \frac{df}{dx} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{df}{dx} = 0.$$

264. — I. Proposons-nous, comme premier exemple, de *chercher les trajectoires orthogonales des paraboles qui ont même axe et même sommet.* Ces paraboles ont pour équation

$$(4) \qquad y^2 = 2px, \quad \text{ou} \quad y^2 - 2px = 0.$$

On en tire

$$\frac{df}{dx} = -2p, \quad \frac{df}{dy} = 2y;$$

et, en substituant dans la relation (3), on obtient

$$y + p\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{ou} \quad y + p\,y' = 0.$$

Cette relation donne

$$p = -\frac{y}{y'},$$

et, en substituant pour p cette valeur dans l'équation (4), on trouve

$$y^2 + \frac{2xy}{y'} = 0.$$

Cette équation différentielle est satisfaite par $y = 0$; et, en effet, l'axe commun des paraboles les rencontre toutes à angle droit. Si l'on supprime cette solution, il reste

$$y + \frac{2x}{y'} = 0,$$

ou

$$y\,dy + 2x\,dx = 0.$$

En intégrant on obtient

$$y^2 + 2x^2 = \text{const}.$$

C'est l'équation générale d'une famille d'ellipses semblables et semblablement placées, ayant pour centre le sommet commun des paraboles.

II. — Nous chercherons, comme second exemple, les *trajectoires orthogonales des cercles de rayon* R, *qui ont leurs centres en ligne droite.*

En prenant la droite des centres pour axe des x, l'équation générale des cercles considérés sera

$$(5) \qquad y^2 + (x - \alpha)^2 = R^2.$$

On en tire

$$\frac{df}{dx} = 2(x - \alpha), \quad \text{et} \quad \frac{df}{dy} = 2y.$$

Substituant dans la condition (3), on obtient

$$y - y'(x - \alpha) = 0, \quad \text{d'où} \quad x - \alpha = \frac{y}{y'},$$

et, en remplaçant $x - \alpha$ par cette valeur dans l'équation (5), il vient

$$y^2 + \frac{y^2}{y'^2} = R^2, \quad \text{d'où} \quad \sqrt{(R^2 - y^2)} \,.\, dy = y\,dx.$$

On sépare immédiatement les variables, et l'on a

$$dx = \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}\, dy,$$

et, en intégrant,

$$x = \log'. \frac{R - \sqrt{R^2 - y^2}}{y} + \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y} + \text{const.}$$

(Pour faire l'intégration, il est commode de poser

$$y = R \sin \omega,$$

ω étant une nouvelle variable.)

III.—Enfin nous nous proposerons, comme dernier exemple, de *trouver les courbes qui coupent sous un angle donné, dont la tangente est* k, *toutes les paraboles qui ont même axe et même paramètre.*

L'équation générale de ces paraboles est

(6) $$y^2 = 2p(x - \alpha).$$

On en tire

$$\frac{df}{dx} = -2p, \quad \text{et} \quad \frac{df}{dy} = 2y.$$

En substituant dans la condition (2), on obtient

$$k = \frac{yy' - p}{y + py'}, \quad \text{ou} \quad (kp - y)\,dy + (ky + p)\,dx = 0,$$

équation qu'il convient d'écrire, en divisant par k, sous la forme

$$\left(p - \frac{y}{k}\right) dy + \left(y + \frac{p}{k}\right) dx = 0.$$

Cette équation ne contenant pas α, il n'y a pas d'élimination à faire, et l'on a ainsi immédiatement l'équation générale des trajectoires.

En séparant les variables, on la met sous la forme

$$dx + \frac{\left(p - \frac{y}{k}\right) dy}{y + \frac{p}{k}} = 0.$$

Pour l'intégrer, on posera $y + \frac{p}{k} = u$, d'où $dy = du$, et, en substituant,

$$dx + \frac{\left(p - \frac{u}{k} + \frac{p}{k^2}\right) du}{u} = 0,$$

ou

$$dx + p\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\frac{du}{u} - \frac{du}{k} = 0.$$

En intégrant on obtient

$$x + p\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\log' u - \frac{u}{k} = C,$$

et, en remettant pour u sa valeur, et tirant celle de x,

$$x = \frac{y}{k} + \frac{p}{k^2} - p\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\log'.\left(y + \frac{p}{k}\right) + C;$$

c'est l'équation générale des trajectoires demandées.

Si l'angle donné est droit, on a $k = \infty$, et l'équation des trajectoires orthogonales est

$$x = C - p \log'.y,$$

équation que l'on peut mettre sous la forme

$$y = Ae^{-\frac{x}{p}};$$

c'est une logarithmique ordinaire.

FIN

APPENDICE

DÉMONSTRATION DE QUELQUES PRINCIPES D'ALGÈBRE

EMPLOYÉS DANS LES

PREMIERS ÉLÉMENTS DU CALCUL INFINITÉSIMAL

I

Notions sur la convergence des séries.

1. — On nomme *série* une suite indéfinie de nombres, entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, qui se succèdent d'après une loi déterminée. Ainsi les progressions, soit arithmétiques, soit géométriques, sont des séries.

Une série est dite *convergente* lorsque la somme de ses termes tend vers une limite finie et déterminée, lorsque l'on en prend un nombre de plus en plus grand. Ainsi une progression géométrique décroissante est une série convergente, car on sait que la somme s de ses termes tend vers la limite

$$\frac{a}{1-q},$$

a désignant le premier terme et q la raison.

Une série est dite *divergente* lorsque la somme de ses termes croît au delà de toute limite ou lorsqu'elle ne tend pas vers

une limite déterminée. Ainsi la suite naturelle des nombres forme une série divergente. Il en est de même, pour $x = \pi$, de la série

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots,$$

car elle devient, pour cette valeur particulière de x,

$$+1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots,$$

série dont la somme tend vers $+1$ ou vers *zéro*, selon que l'on prend un nombre de termes impair ou pair.

Nous considérerons d'abord les séries dont tous les termes sont positifs.

2. — Pour qu'une série soit convergente, il faut avant tout que ses termes aillent en décroissant indéfiniment, au moins à partir d'un certain rang. Car si les termes restaient constamment supérieurs à une quantité fixe δ, d'ailleurs aussi petite qu'on le voudra, la somme des n premiers termes serait supérieure à $n\delta$, quantité que l'on peut rendre aussi grande que l'on voudra en prenant n suffisamment grand ; la série ne serait donc pas convergente.

Mais cette condition de convergence, toujours nécessaire, n'est pas suffisante. Il suffit de le montrer sur un exemple. On choisit ordinairement pour cela la série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots +,$$

qui porte le nom de *série harmonique*. Elle remplit la condition dont il s'agit, puisque le terme général $\frac{1}{n}$ peut être rendu aussi petit que l'on voudra. Cependant elle est divergente, car on peut l'écrire

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

La première parenthèse a une valeur plus grande que 2 fois $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{2}$; la deuxième parenthèse a une valeur plus grande que 4 fois $\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{2}$; la troisième a une valeur plus grande que 8 fois $\frac{1}{16}$ ou $\frac{1}{2}$; et ainsi de suite.

La somme des termes de la série se compose donc d'une suite de quantités toutes plus grandes que $\frac{1}{2}$, sauf le premier terme; cette somme peut donc devenir aussi grande que l'on voudra en prenant un nombre suffisant de termes. Donc la série harmonique est divergente.

3. — On a donné divers caractères pour reconnaître la convergence des séries ; le plus utile dans la pratique est le suivant :

Une série est convergente si le rapport d'un terme à celui qui le précède est constamment moindre qu'une quantité fixe k *plus petite elle-même que l'unité.* Soient, en effet, u_0, u_1, u_2, u_3, ..., u_n, etc., les différents termes de la série. On pourr écrire :

$$
\begin{aligned}
&u_0 = u_0,\\
&u_1 < ku_0,\\
&u_2 < ku_1 < k^2 u_0,\\
&u_3 < ku_2 < k^3 u_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_n < k_n u_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

et, en ajoutant membre à membre, et désignant par S_n la somme des termes depuis u_0 jusqu'à u_n,

$$S_n < u_0 (1 + k + k^2 + k^3 + \ldots + k^n),$$

ou, puisque k est moindre que 1,

$$S_n < u_0 \cdot \frac{1 - k^{n+1}}{1 - k}.$$

Or, à mesure que n augmente, le second membre s'approche de plus en plus de $u_0 \cdot \frac{1}{1 - k}$. Donc la série est convergente.

Il est facile, à l'aide d'un raisonnement analogue, d'évaluer une limite supérieure de l'erreur commise en s'arrêtant au terme u_n. En effet, le reste R, ou l'ensemble des termes qui suivent u_n, peut s'écrire :

$$R = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots,$$

et, comme on a

$$u_{n+1} < k u_n,$$
$$u_{n+2} < k u_{n+1} < k^2 u_n,$$
$$u_{n+3} < k u_{n+2} < k^3 u_n,$$

et ainsi de suite, on peut écrire :

$$R < u_n (k + k^2 + k^3 + \dots)$$

ou

$$R < u_n \frac{k}{1 - k}.$$

4. — On applique ordinairement ces règles à la série

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2.3 \dots n} + \dots$$

Le rapport du dernier terme écrit à celui qui le précède est $\frac{1}{n}$, quantité moindre que l'unité ; et le rapport de deux

termes consécutifs va sans cesse en diminuant à mesure qu'on avance dans la série ; donc, en vertu du principe ci-dessus démontré, cette série est convergente. On désigne sa valeur par la lettre e ; c'est la base des logarithmes népériens.

Si l'on applique à cette série la règle ci-dessus relative à l'erreur commise, on voit qu'en s'arrêtant au terme $\frac{1}{1.2.3...n}$ on commet une erreur moindre que

$$\frac{1}{1.2.3...n}\cdot\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1.2.3...n}\cdot\frac{1}{n}.$$

On reconnaît ainsi que les 12 premiers termes donnent le nombre e à moins d'une unité du neuvième ordre décimal. On trouve :

$$e = 2,718281828....$$

Ce nombre, qui joue un rôle important dans l'analyse, est une quantité incommensurable. Car si sa valeur pouvait être représentée par une fraction commensurable $\frac{m}{n}$ et qu'on eût

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} \cdots + \frac{1}{1.2.3...n} + \frac{1}{1.2.3...n(n+1)} + \ldots,$$

on aurait, en multipliant les deux membres par le produit $1.2.3...n$,

$$1.2.3...(n-1).m = \text{un nombre entier}$$
$$+\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right].$$

Or, la quantité entre crochets est moindre que la somme

des termes de la progression géométrique décroissante qui a pour premier terme $\frac{1}{n+1}$ et pour raison $\frac{1}{n+1}$, c'est-à-dire qu'elle est moindre que $\frac{1}{n}$. On aurait donc un nombre entier égal à un nombre entier plus une fraction, ce qui est impossible. Donc le nombre e ne saurait être représenté par une fraction commensurable.

5. — On reconnaît aisément que la série

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\ldots$$

est convergente, quel que soit x. Car si l'on pousse la série assez loin pour que n soit supérieur à x, les termes suivants se formeront en multipliant successivement par $\frac{x}{n+1}, \frac{x}{n+2}, \frac{x}{n+3}, \ldots$, facteurs inférieurs à $\frac{x}{n}$; donc, en vertu du principe exposé au n° 3, la série est convergente.

Il en est de même de la série

$$A+\frac{Bx}{1}+\frac{Cx^2}{1.2}+\frac{Dx^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{Nx^n}{1.2.3\ldots n}+\ldots,$$

pourvu que les coefficients A, B, C, ..., N, ..., restent finis et n'aillent pas en croissant indéfiniment. Si, en effet, on désigne par M le plus grand de tous ces coefficients, on voit aisément que la somme des termes de la série proposée est moindre que la somme des termes de la série

$$M\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\ldots\right).$$

Or la quantité entre parenthèses a une limite ; et puisque M

est fini, il en est de même du produit de cette parenthèse par M. Donc la série proposée est convergente.

6. — Ce qu'on peut dire de plus général sur les séries dont tous les termes ne sont pas positifs, c'est qu'une série est convergente si, en prenant tous les termes avec le signe $+$, on obtient une série convergente, ce qui est évident.

Mais il se présente fréquemment une circonstance qui mérite d'être étudiée à part : c'est celle où les termes de la série sont alternativement positifs et négatifs. Dans ce cas, *il suffit, pour la convergence, que les termes aillent en décroissant indéfiniment.* Considérons, en effet, la série

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + u_n - u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

Désignons par S_n, S_{n+1}, S_{n+2} la somme qu'on obtient en s'arrêtant respectivement aux termes u_n, u_{n+1}, u_{n+2}. On aura

$$S_{n+2} = S_{n+1} - u_{n+2}, \quad \text{d'où} \quad S_{n+2} < S_{n+1}$$

et

$$S_{n+2} = S_n + (u_{n+1} - u_{n+2}), \quad \text{d'où} \quad S_{n+2} > S_n,$$

attendu que, les termes de la série allant en diminuant, $u_{n+1} - u_{n+2}$ est positif.

On arriverait à des conclusions analogues si le terme u_n était précédé du signe $-$; il n'y aurait de changé que le sens des inégalités. Dans tous les cas, S_{n+2} est donc compris entre S_n et S_{n+1}. Il en résulte que S_{n+3} est compris de même entre S_{n+1} et S_{n+2}, et par conséquent aussi entre S_n et S_{n+1} ; de même encore S_{n+4} est compris entre S_{n+2} et S_{n+3}, et par conséquent aussi entre S_n et S_{n+1}, et ainsi de suite. La somme des termes de la série tend donc vers une limite finie, puisqu'elle reste comprise entre S_n et S_{n+1} ; donc la série est convergente.

Quand on s'arrête au terme u_n, l'erreur commise est moindre que la différence entre S_n et S_{n+1}, c'est-à-dire moindre que u_{n+1}, ou moindre que le terme qui suit immédiatement celui

auquel on s'arrête. L'erreur est par excès ou par défaut suivant que u_{n+1} est négatif ou positif.

II

Limite vers laquelle tend l'expression

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

lorsque m *tend vers l'infini.*

Pour trouver cette limite, on suppose d'abord m entier; on peut alors développer l'expression proposée par la formule du binome; et, si l'on désigne par S_n la somme des $n+1$ premiers termes, on a

$$S_n = 1 + \frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{m^3} + \dots$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}\,\frac{1}{m^n};$$

ou, en effectuant la division des divers numérateurs par la puissance de m qui figure au dénominateur,

$$S_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3} + \dots$$
$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\dots n}.$$

On compare alors S_n à la somme des $n+1$ premiers termes de la série e; soit e_n cette somme, on sait que l'on a

$$e_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2.3\dots n}.$$

On reconnait aisément que, à partir du troisième terme de ces deux sommes, chaque terme de S_n est moindre que le terme correspondant de e_n, et qu'il a pour limite ce terme correspondant, lorsque l'on fait tendre m vers l'infini, le nombre n conservant une valeur fixe. Il en résulte que e_n est la limite vers laquelle tend S_n quand m tend vers l'infini. On peut donc écrire

$$(1) \qquad e_n - S_n = \mu,$$

μ désignant une quantité qui s'annule pour m infini.

Mais, la série e étant convergente, e est la limite vers laquelle tend e_n lorsque le nombre des termes tend vers l'infini. On peut donc écrire

$$(2) \qquad e - e_n = \nu,$$

ν désignant une quantité qui s'annule pour n infini.

Si maintenant on imagine que l'on fasse tendre à la fois m et n vers l'infini, m étant toujours supposé extrêmement grand par rapport à n, les deux relations (1) et (2) ayant lieu à la fois, on aura en les ajoutant membre à membre

$$(3) \qquad e - S_n = \mu + \nu,$$

et, comme μ et ν tendent alors tous deux vers zéro, il en est de même de leur somme. Il en résulte que la différence $e - S_n$ tend vers zéro, et que par conséquent S_n a pour limite e, lorsque m et n tendent tous deux vers l'infini, m étant toujours supposé infiniment grand par rapport à n. On peut donc écrire

$$\lim. \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e = 2,718281828....$$

On peut faire voir maintenant qu'il n'est pas nécessaire de donner à m des valeurs entières. Quelle que soit, en effet, la

valeur positive attribuée à m, elle sera comprise entre deux nombres entiers consécutifs p et $p+1$. Or on peut écrire

$$\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^p < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+1},$$

et ces inégalités subsisteront quand on fera tendre m, et par suite p, vers l'infini. Mais on a

$$\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^p = \left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p+1} : \left(1+\frac{1}{p+1}\right),$$

quantité qui a pour limite e, car, $p+1$ étant entier, le dividende tend vers e, et le diviseur vers 1.

On a aussi

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+1} = \left(1+\frac{1}{p}\right)^p \times \left(1+\frac{1}{p}\right),$$

quantité qui a aussi pour limite e, car le premier facteur tend vers e, puisque p est entier, et le second tend vers l'unité.

Il en résulte que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est compris entre deux quantités qui ont pour limite commune e, lorsqu'on fait tendre m, et par suite p, vers l'infini; donc cette quantité intermédiaire $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ a elle-même pour limite le nombre e.

On peut même faire voir que l'expression proposée tend encore vers e, lorsqu'on donne à m des valeurs négatives. On a, en effet,

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} = \left(\frac{m}{m-1}\right)^m = \left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1} \times \left(1+\frac{1}{m-1}\right),$$

quantité qui a pour limite e, puisque, $m-1$ étant positif, le premier facteur tend vers e, tandis que le second tend vers l'unité.

III

Lorsqu'un polynome est ordonné par rapport aux puissances croissantes d'une variable h, *on peut toujours donner à cette variable une valeur assez petite pour que le premier terme du polynome donne son signe à tout le développement.*

Supposons d'abord que le premier terme soit constant, et que l'on ait à considérer le polynome

$$A + Bh + + Ch^2 + Dh^3 + \ldots + Nh^n.$$

Il s'agit de démontrer que l'ensemble des termes qui suivent le premier peut être rendu moindre que A en prenant h suffisamment petit. En effet, soit M le plus grand de tous les coefficients, en valeur absolue, à partir de B; l'ensemble de tous les termes qui suivent A est évidemment moindre que

$$Mh + Mh^2 + Mh^3 + \ldots + Mh^n,$$

ou moindre que

$$M\,(h + h^2 + h^3 + \ldots + h^n),$$

expression qui revient à

$$M.\frac{h - h^{n+1}}{1 - h},$$

et tend vers zéro en même temps que h, et peut par conséquent être rendue moindre que toute quantité donnée, en prenant h suffisamment petit. Cette expression peut donc être rendue moindre que A; et, à plus forte raison, on pourra rendre l'ensemble des termes qui suivent A dans le polynome proposé moindre que ce premier terme. Donc enfin ce premier terme donnera son signe à tout le développement.

Supposons, en second lieu, que le premier terme contienne en facteur une puissance de h, et qu'on ait à considérer le polynome

$$Ah^n + Bh^{n+1} + Ch^{n+2} + \ldots + Ph^{n+p},$$

on pourra l'écrire

$$h^n(A + Bh + Ch^2 + \ldots + Ph^p).$$

Or, d'après ce qui a été démontré ci-dessus, on peut prendre h assez petit pour que la quantité entre parenthèses prenne le signe de A ; donc le polynome proposé aura le signe de Ah^n, c'est-à-dire le signe de son premier terme.

FIN DE L'APPENDICE.

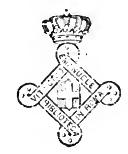


TABLE DES MATIÈRES

DEUXIÈME PARTIE.

PREMIERS ÉLÉMENTS DU CALCUL INTÉGRAL.

APPENDICE.

PARIS. — IMP. SIMON RAÇON ET COMP., RUE D'ERFURTH

ERRATA

Page 16, ligne 10 : $x = \sin\alpha$, lisez $y = \sin\alpha$

— 19, — 2 : Δv, Δw, lisez dv, dw

— 31, — 14 : $1 + x$, lisez $1 + x^2$

— 34, — 24 : $1 + x$, lisez $1 + x^2$

— 47, — 3 : qd^3y, lisez qd^2y

— 47, — 9 : $dz =$, lisez $d^2z =$

— 48, — 12 : $2y'^2$, lisez $2y'$

— 55, — 19 : $h - 2$, lisez h^{n-2}

— 58, — 9 : $\frac{1}{p+1}$, lisez $\frac{h}{p+1}$

— 60, — 9 : $\varphi(x) = -$, lisez $\varphi(x) = +$

— 60, — 14 : $x + \theta h$, lisez $x - \theta h$

— 67, — 9 : $-\frac{x}{1} - -$, lisez $-\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} -$

— 67, — 10 : $-\frac{x^n}{n-1}(1 - \theta x)^{-n}(1 - \theta)^n$,
lisez $-x^n(1 - \theta x)^{-n}(1 - \theta)^{n-1}$

— 67, — 12 : $\frac{x^n}{n-1}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right)^n$, lisez $\frac{x^n}{1-\theta}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right)^n$

— 74, — 10 : S_n, lisez R_n

— 79, — 25 : $\frac{1.2.3}{h^3}$, lisez $\frac{h^3}{1.2.3}$

— 84, — 18 : $\frac{a}{b}$, lisez $\frac{b}{a}$

Page 130, ligne 11 : 16, lisez 4

— 130, — 13 : $y'' = \pm\frac{1}{2}$, lisez $y'' = \pm 2$

— 132, — 4 : $\frac{1}{2}x + x^2$, lisez $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$

— 187, — 13 : $f(a)$, lisez $f(\alpha)$

— 208, — 2 : $\frac{4}{3}\log'(x-2)+$, lisez $\frac{4}{3}\log'(x-2)-$

— 213, — 2 : $\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{u^2}$, lisez $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{u^2}$

— 234, — 8 : $x \cot x$, lisez $x \operatorname{arc} \cot x$

— 259, — 6 : lisez $U = \frac{h}{3}[4(u_1 + u_3 + u_5 \ldots) + 2(u_2 + u_4 + u_6 \ldots)]$.

— 270, — 9 : définie, *lisez* indéfinie

— 311, — 17 : $a'h + b'k = C$, lisez $a'h + b'k = C'$

— 317, — 11 : *supprimez* $+C$

— 317, — 12 : *supprimez* et C une constante arbitraire

